Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik



Valentin Katter

Historische, logische und individuelle Genese der Trigonometrie aus didaktischer Sicht





Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik

Band 10

Reihe herausgegeben von

Andrea Peter-Koop, Universität Bielefeld, Bielefeld, Deutschland

Rudolf vom Hofe, Universität Bielefeld, Bielefeld, Deutschland

Michael Kleine, Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Bielefeld, Deutschland

Miriam Lüken, Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Bielefeld, Deutschland

Die Reihe Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik fokussiert sich auf aktuelle Studien zum Lehren und Lernen von Mathematik in allen Schulstufen und -formen einschließlich des Elementarbereichs und des Studiums sowie der Fort- und Weiterbildung. Dabei ist die Reihe offen für alle diesbezüglichen Forschungsrichtungen und -methoden. Berichtet werden neben Studien im Rahmen von sehr guten und herausragenden Promotionen und Habilitationen auch

- empirische Forschungs- und Entwicklungsprojekte,
- theoretische Grundlagenarbeiten zur Mathematikdidaktik,
- thematisch fokussierte Proceedings zu Forschungstagungen oder Workshops.

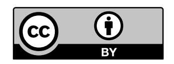
Die Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik nehmen Themen auf, die für Lehre und Forschung relevant sind und innovative wissenschaftliche Aspekte der Mathematikdidaktik beleuchten.

Valentin Katter

Historische, logische und individuelle Genese der Trigonometrie aus didaktischer Sicht



Valentin Katter
Bielefeld, Deutschland



I acknowledge support for the publication costs by the Open Access Publication Fund of Bielefeld University.

ISSN 2199-739X ISSN 2199-7403 (electronic)
Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik
ISBN 978-3-658-41354-5 ISBN 978-3-658-41355-2 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-41355-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Marija Kojic
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

Während bis zum Ende des 19. Jahrhunderts die Trigonometrie mit ihren astronomischen Anwendungen ein fester Bestandteil der gymnasialen mathematischen Bildung war, nahm ihr Stellenwert in der Folgezeit zunehmend ab, insbesondere seitdem sich Analysis, lineare Algebra und Stochastik als verpflichtende Kerninhalte der gymnasialen Oberstufe herausbildeten. Dementsprechend stand die Trigonometrie über Jahrzehnte eher am Rande didaktischer Forschungs- und Entwicklungsarbeit, dies gilt insbesondere auch für den deutschsprachigen Raum. So fehlen bislang sowohl sachanalytische, konstruktive als auch deskriptive Studien zu grundlegenden Inhalten trigonometrischer Lernprozesse. Dies steht in diametralem Gegensatz zur Bedeutung, die der Trigonometrie für die Entwicklung eines tragfähigen Verständnisses reeller Funktionen und ihrer Anwendungen zukommt. Nimmt man den Anspruch auf Kompetenz- und Anwendungsorientierung des Mathematikunterrichts ernst, so stellt sich damit die Frage, wie die Trigonometrie innerhalb der schulischen Bildung zeitgemäß umgesetzt werden kann und welche didaktischen Konzepte geeignet sind, das Wissen über Trigonometrie bei Lernenden und Lehrenden zu verbessern. In diesem Themenkomplex bewegt sich die vorliegende Arbeit von Valentin Katter.

Ausgangspunkt und Motivation bilden Desiderata in der didaktischen Forschung zur Trigonometrie, die im Zuge einer Aufarbeitung des relevanten Forschungsbestands im Einzelnen herausgearbeitet werden. So gibt es bislang kaum Arbeiten zu Grundvorstellungen im Bereich der Trigonometrie. Ebenso gibt es kaum Arbeiten über die deskriptive Analyse individueller Denkprozesse in diesem Bereich. In den wenigen empirischen Studien zu diesem Thema fehlen Arbeiten, die den Umgang mit Grundbegriffen zur Trigonometrie in authentischen Lernsituationen erfassen. Dies führt den Autor zur Zielsetzung seiner Arbeit, nämlich (1) der Durchführung einer didaktisch orientierten Sachanalyse

zur Trigonometrie, (2) einer Herleitung von normativen Grundvorstellungen auf der Basis der durchgeführten Sachanalyse und (3) der empirischen Überprüfung der entwickelten normativen Kategorien in explorativen Fallstudien.

Die Entwicklung einer didaktisch orientierten Sachanalyse und die daraus abgeleiteten normativen Grundvorstellungskategorien stellen den inhaltlichen Schwerpunkt der Arbeit dar. Den konzeptionellen Rahmen hierzu bilden das Grundvorstellungskonzept, die klassischen Arbeiten zur didaktischen Analyse, die hierzu entwickelten grundlegenden stoffdidaktischen Arbeiten sowie die didaktisch-phänomenologische Theorie Freudenthals. Auf der Basis dieser Theoriebestände wird der Komplex Trigonometrie in seiner historisch-, logisch- und individuell-genetischen Entwicklung analysiert. Mit dieser Verbindung von Sachanalyse und genetischer Perspektive gelingt es dem Autor ein methodisches Verfahren zu entwickeln, das zur Identifizierung und Formulierung normativer Grundvorstellungen führt. Es besteht im Wesentlichen aus vier aufeinander folgenden und jeweils aufeinander aufbauenden Phasen, nämlich (1) Sammeln inhaltlicher Kontexte und Phänomene, (2) Ordnen dieser Phänomene nach Darstellungsformen, (3) Klassenbildung nach Kerneigenschaften des jeweiligen Begriffs und (4) darauf basierte Formulierung von Grundvorstellungen.

Der Autor setzt diese Schritte in einer umfassenden und systematischen didaktischen Sachanalyse mit genetischem Fokus für den Bereich der Trigonometrie um. Als Ergebnis leitet er sechs Grundvorstellungen (Seitenverhältnisvorstellung, Projektionsvorstellung, Referenzdreiecksvorstellung, Koordinatenvorstellung, Oszillationsvorstellung, Funktionsvorstellung) ab und bettet diese in ein Netz von fachlichen Kernelementen ein, die das für die Ausbildung der jeweiligen Grundvorstellung notwendige Hintergrundwissen beschreiben.

Es folgt eine empirische Überprüfung der entwickelten normativen Kategorien in explorativen Fallstudien. Ihre Auswertung führt zur Identifizierung einer Vielzahl von Denkmustern und Vorstellungen, die zum einen die zuvor entwickelten normativen Kategorien in wesentlichen Aspekten bestätigen und zum anderen eine tiefergehende Interpretation trigonometrischer Denkprozesse als die bislang bekannten allgemeinen funktionalen Grundvorstellungen erlauben.

Insgesamt entwickelt Valentin Katter Ergebnisse zu drei Bereichen:

- Seine grundlegenden Analysen zur Genese der Trigonometrie und die daraus entwickelten normativen Grundvorstellungen erweitern sowohl das didaktische Wissen zur Trigonometrie als auch die Theorie von Grundvorstellungen.
- Die qualitativen Analysen bestätigen die Sinnhaftigkeit der zuvor entwickelten normativen Kategorien und führen zur Identifizierung von Denkmustern

und Vorstellungen beim Umgang mit dem Sinus, die bislang nicht in dieser Spezifität beschrieben wurden.

- Mit der von ihm entwickelten Sachanalyse gelingt es dem Autor, ein allgemeines Verfahren zur Gewinnung von normativen Grundvorstellungen zu entwickeln, das auch auf ähnliche inhaltliche Gebiete – z. B. auf andere Funktionenklassen – angewendet werden kann.

Es ist zu wünschen, dass diese Ergebnisse das Interesse der mathematikdidaktischen Community finden und zur weiteren Erforschung und Förderung mathematischer Lernprozesse im Bereich der Trigonometrie und anderer Funktionsklassen beitragen können.

Bielefeld
im Januar 2023

Rudolf vom Hofe

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis



Einleitung 1

1.1 Hintergrund der Arbeit

Der Stellenwert der Trigonometrie in den Kernlehrplänen der Sekundarstufe I und II variiert deutlich in den unterschiedlichen Bundesländern. In Nordrhein-Westfalen reicht es beispielsweise, die Ableitung der Sinusfunktion schlichtweg zu *nennen* (KLP II NRW 2014), wohingegen sich die Schülerinnen und Schüler in Bayern die Ableitungsfunktion auf *graphischem Weg plausibel machen* sollen (KLP Bayern 2009). In Berlin sollen die Schülerinnen und Schüler den *Sinus-* und *Kosinussatz* nutzen, um in beliebigen Dreiecken Seitenlängen zu bestimmen (KLP Berlin 2006), während in Niedersachsen die beiden Sätze nicht auftauchen. Schaut man sich den aktuellen Kernlehrplan für Nordrhein-Westfalen der Sekundarstufe I für Gymnasien (KLP I NRW 2019) im Fach Mathematik an, so kann man feststellen, dass die Trigonometrie sowohl in der Geometrie, zur Berechnung unbekannter Größen in beliebigen Dreiecken, als auch im Bereich der Funktionen, zur Beschreibung periodischer Prozesse, wieder eine wichtigere Rolle spielt. Vergleicht man den Kernlehrplan mit der Vorgängerversion aus dem Jahr 2007, sieht man, dass die Inhalte in der Trigonometrie erweitert wurden: In der Geometrie hat der Kosinussatz wieder Einzug gehalten und im Bereich der Funktionen sollen Schülerinnen und Schüler *die Sinus- und Kosinusfunktion als Verallgemeinerung der trigonometrischen Definition des Sinus und des Kosinus am Einheitskreis erläutern.* Darüber hinaus wird das Bogenmaß wieder thematisiert und die Parameter a und T in der Funktionsgleichung $f(t) = a \cdot \sin\left(t \cdot \frac{2\pi}{T}\right)$ sollen *als Amplitude und Periode periodischer Vorgänge gedeutet werden.*

Diese Änderungen stellen sich gegen den Trend der letzten Jahrzehnte, in denen die Trigonometrie zunehmend aus den Kernlehrplänen verschwand und

V. Katter, *Historische, logische und individuelle Genese der Trigonometrie aus didaktischer Sicht*, Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik 10,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-41355-2_1

als Schulstoff in einigen Bundesländern kaum noch sichtbar war. Diese Vernachlässigung wird umso deutlicher, wenn bedacht wird, dass am Ende des 19. Jahrhunderts die Trigonometrie in der Himmelskunde als krönender Abschluss der Oberprima gehandelt wurde und ihr nunmehr in der Oberstufe allenfalls eine Nebenrolle zugeordnet wird (vgl. Abschnitt 4.1). Besonders eindringlich zeigt sich dieser Kontrast im Übergang von der Schule zur Hochschule, da in mathematischen Fachvorlesungen Wissen über trigonometrische Zusammenhänge – das einst wichtiger Teil des Schulstoffes war – oft vorausgesetzt wird. Bei angehenden Lehrerinnen und Lehrern, denen dieses Wissen nicht in adäquater Form zugänglich gemacht wird, kann dies zu einer Tradierung von Nichtwissen führen, unter der besonders zukünftige Schülerinnen und Schüler leiden.

Für die Lehrerausbildung wird im Lichte dieser Tatsachen zwei Fragen besonderer Nachdruck verliehen: Welche inhaltlichen Kompetenzen sollten angehenden Lehrkräften in der Trigonometrie vermittelt werden? Mit welchen inhaltlichen Kompetenzen sind Lehramtsstudierende im Bereich Trigonometrie tatsächlich ausgestattet?

In zahlreichen empirischen Studien wurde herausgefunden, dass Studierende ihr Studium zum Teil mit erheblichen Defiziten im Umgang mit trigonometrischen Funktionen beginnen. In diesen Studien wurden unter anderem Probleme im Umgang mit dem Bogenmaß aufgezeigt (Akkoc 2008), Schwierigkeiten beim Übergang vom Einheitskreis zum Funktionsgraphen der Sinusfunktion identifiziert (Brown 2005) sowie mangelnde fachliche Kenntnisse im Bereich der Trigonometrie (Fi 2003) festgestellt. Studien, welche die Situation an deutschen Universitäten untersuchen, sind bisher nicht bekannt. Ergebnisse der vorliegenden Studie an der Universität Bielefeld lassen darauf schließen, dass die Situation sich ähnlich darstellt.

Welche inhaltlichen Kompetenzen angehende Lehrende im Bereich der Trigonometrie entwickeln sollten, variiert je nach Blickwinkel und entsprechendem Anforderungskatalog (Katter 2020a). Dazu wird im Folgenden ein Blick auf verschiedene Zielgruppen geworfen, die sich mit der Trigonometrie auseinandersetzen und an die unterschiedlichen Anforderungen gestellt werden: Schülerinnen und Schüler, Mathematikstudierende und Lehramtsstudierende. Zu diesen drei Zielgruppen lassen sich jeweils inhaltliche Anforderungen auf den folgenden Grundlagen formulieren:

- Inhaltliche Anforderungen der Kernlehrpläne an die Schülerinnen und Schüler.
- Inhaltliche Anforderungen des mathematischen Fachstudiums an Mathematikstudierende.
- Inhaltliche Anforderungen des Lehramtsstudiums an Lehramtsstudierende.

Die inhaltlichen Anforderungen der Kernlehrpläne sind klar definiert. Sie beziehen sich auf einen verständigen Umgang mit der Sinusfunktion in Sachkontexten, an Dreiecken, am Einheitskreis und auf analytischer Ebene als Funktionsterm bzw. Funktionsgraphen.

Das mathematische Fachstudium fordert darüber hinaus eine klare analytische Charakterisierung bzw. Einordnung der Sinusfunktion in das jeweilige formale System. Dies kann z. B. durch die Definition der Sinusfunktion als Taylorreihe oder als Lösung der Differentialgleichung $y“ + y = 0$ geschehen.

Das Lehramtsstudium fordert eine Vernetzung der oben genannten Inhalte. Lehramtsstudierende sollten erlernen, Schülerinnen und Schülern die Zusammenhänge im Bereich der Trigonometrie verständlich zu erklären. Zusammenhänge können beispielsweise zwischen realweltlichen Anwendungskontexten und mathematischen Definitionen hergestellt werden (z. B. zwischen Landvermessungen und der Definition des Sinus am rechtwinkligen Dreieck). Solche Verknüpfungen bilden die Grundlage zum Aufbau adäquater Grundvorstellungen (vom Hofe 1995). Weitere Zusammenhänge können zwischen unterschiedlichen mathematischen Definitionen und Darstellungen hergestellt werden (z. B. der Definition am rechtwinkligen Dreieck und der Definition am Einheitskreis), wodurch Grundvorstellungen miteinander vernetzt und flexibel genutzt werden können. Darüber hinaus nennt Winter (1992) im Zusammenhang mit dem Lehramtsstudium drei Wissensbereiche, die weder in den fachmathematischen Vorlesungen noch im Referendariat genügend berücksichtigt werden:

- *Wissen um Genese und kulturelle Kontexte mathematischer Ideen*
- *Wissen um Heuristiken zur Lösung mathematischer Aufgaben und zur gedächtnismäßigen Organisation mathematischer Inhalte*
- *Wissen um Anwendungen, Verkörperungen, Realisierungen mathematischer Begriffe und Theorien, also auch Wissen um die allgemeine Bedeutung der Mathematik in Wissenschaft und Gesellschaft.*
  (Winter 1992, S. 16)

Diese Wissensbereiche machen nach Winter einen wesentlichen Teil der pädagogischen Dimension des Lehrberufs aus und sollten daher besonders im Lehramtsstudium berücksichtigt werden.

1.2 Ziele der Arbeit

Bei der vorliegenden Arbeit handelt es sich um eine explorative Studie, die sich mit schul- und studiumsrelevanten Themen der Trigonometrie beschäftigt.

Das Lernen und Lehren der Trigonometrie beinhaltet einige aus didaktischer Sicht besondere Herausforderungen. Diese Herausforderungen sind zum einen darin begründet, dass es sich bei den trigonometrischen Funktionen um nicht algebraische Funktionen handelt, zum anderen darin, dass der Sinusbegriff in verschiedenen Sachzusammenhängen genutzt werden kann und durch diese unterschiedliche Bedeutung bekommt. Erkennbar wird dieser Bedeutungswechsel beispielsweise bei der Anwendung des Sinus am Einheitskreis und am rechtwinkligen Dreieck. Darüber hinaus wird der Sinus eingesetzt um periodische Prozesse zu modellieren und er ist ein wichtiges innermathematisches Werkzeug bei der Fourieranalyse. Diese und weitere Sachzusammenhänge bilden die Grundlage für eine Reihe neuer Grundvorstellungen, die dem Sinus aus normativer Sicht zugeschrieben werden können und über die bekannten allgemeinen funktionalen Grundvorstellungen (Vollrath 1989) hinaus gehen. Zur Herleitung von Grundvorstellungen zu einem mathematischen Begriff wird in dieser Arbeit eine didaktisch orientierte Sachanalyse in Hinblick auf die historische, logische und individuelle Genese des Sinusbegriffs durchgeführt.

Das didaktische Ziel einer solchen Bestimmung von Grundvorstellungen leitet sich aus der Annahme ab, dass diese im Individuum ausgebildet werden können (vom Hofe 1995). Diese individuellen Schülervorstellungen bilden den deskriptiven Aspekt des Grundvorstellungskonzepts ab und können im Einzelfall qualitativ erfasst werden. Der Vergleich normativ intendierter und individuell konstruierter Vorstellungen ermöglicht es schließlich, Konsequenzen für den individuellen Lernprozess zu ziehen. Welche individuellen Vorstellungen Lehramtsstudierende ausbilden und welche Entsprechungen es zu den normativ intendierten Grundvorstellungen gibt, wird im empirischen Teil beantwortet. Zusammenfassend lassen sich die folgenden drei Ziele formulieren:

1. Durchführung einer didaktisch orientierten Sachanalyse unter Berücksichtigung der logischen, historischen und individuellen Genese.
2. Herleitung von normativen Grundvorstellungen auf der Basis der didaktisch orientierten Sachanalyse.
3. Rekonstruktion und Analyse von Denkprozessen von Studierenden im Umgang mit dem Sinusbegriff mithilfe des Grundvorstellungskonzeptes.

Bei der Rekonstruktion und Analyse von Denkprozessen wird außerdem untersucht, inwieweit die neuen funktionsklassenspezifischen Grundvorstellungen zur Sinusfunktion eine geeignete Erweiterung der allgemeinen funktionalen Grundvorstellungen – Zuordnungsvorstellung, Kovariationsvorstellung und Objektvorstellung – darstellen.

1.3 Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit besteht aus sieben Kapiteln. Bei dem ersten Kapitel handelt es sich um die Einleitung, in der der Hintergrund, die Ziele und die Gliederung der Arbeit vorgestellt werden.

Im zweiten Kapitel wird der Stand der didaktischen Forschung im Bereich der Trigonometrie dargestellt. Dazu wird im ersten Abschnitt 2.1 ein kurzer Überblick über die didaktische Forschung im Allgemeinen gegeben, anschließend werden in Abschnitt 2.2 exemplarisch relevante, empirische Studien zur Didaktik der Trigonometrie vorgestellt. Im dritten Abschnitt 2.3 werden aus den vorgestellten Studien Forschungsdesiderata abgeleitet.

Im dritten Kapitel wird der konzeptionelle Rahmen der theoretischen Analyse vorgestellt. Zunächst wird in Abschnitt 3.1 geklärt, was unter *Darstellungen mathematischer Objekte* zu verstehen ist. Darstellungen mathematischer Objekte dienen in dieser Arbeit als Träger von *Grundvorstellungen*, die in Abschnitt 3.2 erläutert werden. Die Klärung des Grundvorstellungskonzeptes beinhaltet eine Diskussion der normativen, deskriptiven und konstruktiven Aspekte, die Unterscheidung zwischen primären und sekundären Grundvorstellungen, allgemeine funktionale Grundvorstellungen, den Prozess der Sinnkonstituierung sowie den Zusammenhang zu fachlichen Charakterisierungen eines mathematischen Begriffs. In Abschnitt 3.3 werden unterschiedliche Sichtweisen auf *didaktisch orientierte Sachanalysen* geschildert und erklärt, wie eine solche Analyse dabei helfen kann, normativ intendierte Grundvorstellungen zu einem mathematischen Begriff zu finden. Anschließend wird in Abschnitt 3.4 auf der Grundlage des *genetischen Prinzips* und den drei Aspekten der logischen, historischen und individuellen Genese ein Vorgehensweise vorgestellt, mit der in vier Schritten eine didaktisch orientierte Sachanalyse durchgeführt und normativ intendierte Grundvorstellungen identifiziert werden können.

Im vierten Kapitel wird eine didaktisch orientierte Sachanalyse durchgeführt, mit deren Hilfe normative Grundvorstellungen zum Sinus formuliert werden. In Abschnitt 4.1 wird ein Überblick über die Geschichte der Trigonometrie im mathematischen Unterricht vom Anfang des 20. Jahrhunderts bis heute gegeben. Diese Darstellung dient dem Ziel, die normativ intendierte individuelle Genese der Trigonometrie nachzuvollziehen, die anhand idealtypischer Lernwege in der Schule veranschaulicht wird. In Abschnitt 4.2 wird die geschichtliche Genese der Trigonometrie betrachtet. Beginnend 1650 vor Christus und dem Bau der Pyramiden, führt dieser Exkurs zu den Anfängen der sphärischen Trigonometrie in der Astronomie bei den Griechen um 600 vor Christus, bis hin zu einer Weiterentwicklung der Werkzeuge und Methoden in Indien ca. 500 nach

Christus. Anschließend wird in Abschnitt 4.3 in einer Auseinandersetzung mit den fachlichen Charakterisierungen des Sinus und den möglichen Zusammenhängen zwischen ihnen, die logische Genese herausgearbeitet. Hierbei geht es um eine systematische, mathematische Klärung des Begriffs. In Abschnitt 4.4 werden ergänzend Anwendungskontexte der Trigonometrie zusammengetragen. In Abschnitt 4.5 wird eine erste Klassenbildung vorgenommen. Dazu werden die gesammelten Sachzusammenhänge den unterschiedlichen Darstellungen der Sinusfunktion zugeordnet. In Abschnitt 4.6 wird diese Einteilung verfeinert und es werden sechs normative Grundvorstellungen mit passenden Grundkenntnissen zum Sinus formuliert. Die Formulierung dieser Grundvorstellungen markiert das Ende des Theorieteils.

Mit Kapitel 5 fängt der empirische Teil der Arbeit an. In Abschnitt 5.1 werden zunächst die Forschungsfragen konkretisiert. Insgesamt werden drei Fragen formuliert, mit denen die Denkprozesse der Studierenden, funktionsklassenspezifischen Grundvorstellungen zum Sinus und mögliche Schwierigkeiten beim Umgang mit der Sinusfunktion untersucht werden. In Abschnitt 5.2 wird die Konzeption der Studie vorgestellt. Es wurden insgesamt acht Paare von Master Lehramtsstudierenden dabei gefilmt, wie sie in Partnerarbeit drei trigonometrische Probleme lösen, in denen der Sinus am rechtwinkligen Dreieck, am Einheitskreis und als Modellfunktion eines periodischen Prozesses behandelt wird.

In Kapitel 6 werden die Auswertungen der Fallstudien vorgestellt. In den Abschnitten 6.1, 6.2, 6.3 werden die drei Aufgaben vorgestellt und mithilfe qualitativer Methoden analysiert.

In Kapitel 7 wird die Arbeit zusammengefasst und es werden Perspektiven entwickelt. Im Abschnitt 7.1 werden die Ergebnisse des Theorie- und Empirieteils zusammenfassend dargestellt. Abschließend werden in Abschnitt 7.2 Forschungsperspektiven sowie Perspektiven für den Unterricht entwickelt.

2 Stand der didaktischen Forschung zur Trigonometrie

In diesem Abschnitt soll zunächst eine Antwort auf die Frage gegeben werden, wieso es sich bei der Trigonometrie um ein für die didaktische Forschung relevantes Themengebiet handelt.

Trigonometrische Funktionen gehören zur Funktionsklasse der elementaren nicht-algebraischen Funktionen (Blum & Törner 1983). Funktionen dieser Funktionsklasse sind dadurch ausgezeichnet, dass es keine endliche algebraische Formel gibt mit der Werte dieser Funktionen ausgerechnet werden können. In der Schule können Werte der Sinusfunktion durch geometrische Argumentationen oder heuristische Verfahren am Einheitskreis und an rechtwinkligen Dreiecken bestimmt werden. Weitere Verfahren zur Berechnung bedienen sich der höheren Mathematik, wie der Approximation durch Taylorreihen oder der komplexen Exponentialfunktion (vgl. Abschnitt 4.3). Darüber hinaus zeichnet sich die historische Entwicklung der Trigonometrie besonders durch die Vielzahl unterschiedlicher Methoden und Verfahren aus, die zu immer genaueren Berechnungen der Sinuswerte beigetragen haben (vgl. Abschnitt 4.2). Für das Verständnis trigonometrischer Funktionen ist also nicht nur ein allgemeines Verständnis von Funktionen und arithmetischen Operationen notwendig, sondern auch die inhaltlichen Deutungen dieser Funktionen in unterschiedlichen mathematischen und geometrischen sowie realen Kontexten. Diese inhaltlichen Deutungen bauen jeweils auf umfangreichem fachlichen Vorwissen auf und sind mit weiteren mathematischen Konzepten verknüpft. Zur Beschreibung des komplexen Netzwerks an Informationen können verschiedene didaktische Theorien genutzt werden, darunter die Theorie der kognitiven Schemata (Skemp 1987) oder des concept image (Tall & Vinner 1981). Weiterhin steht die Thematik in Beziehung zur Konstruktion von Wissen und dem Aufbau von Grundvorstellungen (vom Hofe 1995).

V. Katter, *Historische, logische und individuelle Genese der Trigonometrie aus didaktischer Sicht*, Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik 10,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-41355-2_2

Obwohl trigonometrische Funktionen aufgrund der oben genannten Gründe ein weitreichendes Feld für mathematikdidaktische Forschungen darstellen, gibt es im deutschsprachigen Raum wenig empirische Studien, die explizit einen inhaltlichen Schwerpunkt in der Trigonometrie setzen. Ganz anders stellt sich die Situation im englischsprachigen Raum dar, wo die Trigonometrie Bestandteil zahlreicher didaktischer Studien ist. Diese große Anzahl an Studien kann durch den hohen Stellenwert der Trigonometrie in den High-School-curricula der Vereinigten Staaten begründet werden (van Sickle 2011).

In diesem Kapitel wird nun zunächst ein kurzer Überblick über die didaktische Forschung im Allgemeinen gegeben. Anschließend werden relevante didaktische Studien zur Trigonometrie vorgestellt. Zum Schluss werden auf der Grundlage der untersuchten Studien Forschungsdesiderata entwickelt.

2.1 Didaktische Forschung

In der didaktischen Forschung kann grob zwischen theoretischer und empirischer Forschung unterschieden werden (Bellmann 2020). Theoretische Forschung versucht Modelle zu entwickeln, die Lern- und Denkprozesse adäquat und praktikabel abbilden können. Dahingegen versucht die empirische Forschung Zusammenhänge in Lernsituationen zu beobachten und dadurch Vorhersagen über das Lernverhalten zu überprüfen. Diese Unterscheidung darf keinesfalls trennscharf verstanden werden, stattdessen zeigt sich stets eine enge Verzahnung der Theorie und der Praxis. Empirische Befunde beeinflussen die in der Theorie aufgestellten Modelle und die theoretischen Modelle spielen eine Rolle bei der Entwicklung der Messinstrumente und der Auswertungsmethoden.

Die theoretische Forschung beinhaltet inhaltsbezogene und kognitionsbezogene Aspekte. Inhaltsbezogene theoretische Forschung beschäftigt sich mit konkreten mathematischen Inhalten, wie zum Beispiel der Ableitung, Brüchen oder der Sinusfunktion. Diese Inhalte können beispielsweise durch eine didaktisch orientierte Sachanalyse untersucht werden, um normative Grundvorstellungen zu identifizieren oder idealtypische Lernwege zu entwickeln, die dabei helfen können, die mathematischen Inhalte verständnisorientiert zugänglich zu machen. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Stoffdidaktik (Hußmann et al. 2016). Kognitionsbezogene theoretische Forschung beschäftigt sich mit allgemeinen Theorien zum Lehren und Lernen von Mathematik. Dazu gehören unter anderem Theorien zum genetischen Lernen (Wagenschein 1966), das Grundvorstellungskonzept (vom Hofe 1995) oder kognitive Schemata (Skemp 1987).

In der empirischen Forschung gibt es im Wesentlichen zwei Arten von Studien: explorative Studien, die geeignet sind um Hypothesen aufzustellen und Interventionsstudien, die geeignet sind, um Hypothesen zu bestätigen oder zu verwerfen. Je nach Art der Studie werden ein entsprechendes Forschungsdesign und eine Forschungsmethode gewählt. Das Forschungsdesign beschreibt, wie eine Forschung im Einzelnen durchgeführt wird. Welche Zielgruppe hat die Arbeit? Gibt es eine Kontrollgruppe? Welche Methoden werden verwendet und wie werden die Ergebnisse ausgewertet? Zu den Methoden zählen Interviews, Leistungstests, Beobachtungen, Experimente etc. Die Auswertung der Daten geschieht quantitativ oder qualitativ. In der quantitativen Forschung werden durch Operationalisierungen theoretische Begriffe in empirisch messbare Merkmale umgewandelt. Viele der theoretischen Begriffe in der Mathematikdidaktik sind allerdings umfassender und präziser durch qualitative Methoden wie Inhaltsanalysen oder interpretative Forschungsmethoden nachweisbar.

2.2 Didaktische Studien zur Trigonometrie

Um einen Überblick über die didaktischen Studien zur Trigonometrie zu bekommen, lassen sich zunächst zwei Zielgruppen ausmachen. Studien mit einem Fokus auf *Lernende* und Studien mit einem Fokus auf *Lehrende* (Jamshid Nejad 2017). Unabhängig von den spezifischen Inhalten formuliert Jamshid Nejad zu jeder dieser Zielgruppen zentrale prozessorientierte Aspekte der Forschung.

Studien mit einem Fokus auf *Lernende*, die sich beschäftigen mit…

- … der Konstruktion von Wissen und Vorstellungen zu Begriffen aus der Trigonometrie.
- … Schwierigkeiten und Fehlvorstellungen von Lernenden im Umgang mit Konzepten aus der Trigonometrie.
- … dem Einfluss von digitalen Medien beim Lernen von Trigonometrie.

Studien mit einem Fokus auf *Lehrende*, die sich beschäftigen mit…

- … unterschiedlichen Einführungen in die Trigonometrie.
- … Schwierigkeiten von Lehrenden im Umgang mit Konzepten aus der Trigonometrie.
- … Umsetzung trigonometrischer Inhalte im Unterricht.
- … Lehrerprofessionswissen.

Inhaltlich werden in den Studien unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt, die in der Regel mit dem Umgang des Sinus am rechtwinkligen Dreieck, am Einheitskreis und als trigonometrische Funktion zu tun haben. In einigen Studien werden Unterschiede sowie Zusammenhänge zwischen diesen Darstellungen herausgearbeitet. Brown (2005) untersucht in ihrer Studie den Übergang zwischen den Darstellungen bei Schülerinnen und Schülern und entwickelt ein Verstehensmodell des Sinus am Einheitskreis. Kendall und Stacey (1996) vergleichen den Zugang zur Trigonometrie über rechtwinklige Dreiecke mit dem Zugang über den Einheitskreis und stellen fest, dass eine Einführung über rechtwinklige Dreiecke zu besseren Ergebnissen in dem von ihnen entwickelten Test führt.

Die Entwicklung von kohärenten Vorstellungen zum Winkelmaß ist Kern der Studie von Moore (2012). Er stellt in Fallstudien mit Lehramtsstudierenden fest, dass bestimmte Winkelmaße fest mit konkreten geometrischen Objekten verknüpft und von den Studierenden nicht als Ergebnisse eines Messprozesses verstanden werden. Der Umgang mit dem Bogenmaß ist Untersuchungsgegenstand mehrerer Studien (Thompson et al. 2007; Akkoc 2008; Cetin 2015; Katter 2019). Akkoc (2008) stellt fest, dass Lehramtsstudierende überwiegend das Gradmaß dem Bogenmaß vorziehen. Viele Studierende hatten generell Schwierigkeiten damit, reelle Zahlen als Definitionsbereich für trigonometrische Funktionen zuzulassen und akzeptierten nur Werte im Gradmaß. Diese Ergebnisse decken sich mit den Einsichten von Cetin (2015), der außerdem mittels Selbsteinschätzungstests zu den Ergebnissen kommt, dass Studierende sich im Bereich der Trigonometrie kompetenter einstuften als der in der Studie verwendete Leistungstest es misst. Weitere Studien untersuchten den Umgang mit dem Sinus als periodische Funktion (Challenger 2009; Jamshid Nejad 2017; Martinez Ortega et al. 2017). Jamshid Nejad fand heraus, dass viele Mathematikstudierende Schwierigkeiten damit haben, den Zusammenhang zwischen den Parametern in der allgemeinen Funktionsgleichung der Sinusfunktion $\mathrm{a} \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ und dem zugehörigen Graphen herzustellen.

Nach diesem kurzen Überblick über exemplarische Studien, wird im Folgenden auf einige relevante Studien genauer eingegangen. Diese Studien wurden deshalb ausgewählt, weil die dort verwendeten und entwickelten Theorien einen Bezug zum Grundvorstellungskonzept aufweisen. So werden im Bereich der Trigonometrie Verstehensmodelle entwickelt, sinngebende Handlungserfahrungen untersucht, kognitive Schemata analysiert und Grundwissen, das im Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen steht, bei Studierenden abgeprüft. Anschließend werden auf Grundlage der untersuchten Studien Forschungsdesiderata formuliert.

2.2.1 Brown – Verstehensmodell

Eine der umfangreichsten Arbeiten zu fachdidaktischen Fragen der Trigonometrie wurde von Brown (2005) durchgeführt. Brown verfolgt dabei zwei Forschungsziele:

1. Entwicklung und Erprobung eines Tests, basierend auf der vorgestellten Rahmentheorie.
2. Entwicklung eines Verstehensmodells zur Trigonometrie am Einheitskreis.

Mit dem entwickelten Test überprüft Brown, welche Verbindungen Studierende zwischen den Darstellungen des Sinus am rechtwinkligen Dreieck, am Einheitskreis und am Funktionsgraphen herstellen können. In dem von Brown anschließend entwickelten Verstehensmodell wird zwischen drei Interpretation des Sinus am Einheitskreis unterschieden. In den folgenden Abschnitten wird dargelegt, welche Ergebnisse des Tests zur Entwicklung des Verstehensmodells beigetragen haben. Abschließend wird dieses Modell vorgestellt und es werden Zusammenhänge zu den Grundvorstellungen des Sinus hergestellt.

Der Test umfasst zwölf offene Fragen, in denen Eigenschaften der Sinusfunktion anhand unterschiedlicher Darstellungen begründet und Zusammenhänge zwischen diesen Darstellungen erklärt werden sollten. Ein besonderer Fokus liegt auf dem Übergang von der Darstellung des Sinus am Einheitskreis zur Darstellung der Sinusfunktion durch den Funktionsgraphen. An dem Test nahmen 120 Studierende teil. Von diesen wurden sieben Studierende zu einem Interview eingeladen. Es folgt nun eine Darstellung der Ergebnisse von Browns Studie.

Brown kommt zu dem Ergebnis, dass Studierende, welche die unterschiedlichen Interpretationen des Sinus verknüpfen und flexibel zwischen diesen Interpretationen wechseln können, die Sinusfunktion sowohl besser definieren als auch Probleme besser mathematisch lösen können. Darüber hinaus identifizierte Brown mehrere didaktisch relevante Themenbereiche im Zusammenhang mit trigonometrischen Funktionen:

- die unterschiedlichen Definitionen des Sinus,
- das Konzept des Drehwinkels,
- Sinuswerte als reelle Zahlen und als Quotient,
- Koordinaten als Distanzen,
- positive und negative Sinuswerte,
- der Übergang zum Graphen der Sinusfunktion.

Brown nutzt in ihrer Arbeit das Modell der *concept definition* (Tall & Vinner 1981). Sie unterscheidet zwischen der *concept definition* des Sinus und Kosinus, also der Definition, die auf direkte Anfrage hin konkret von den Lernenden formuliert wird und der *working definition*, also der Definition mit der tatsächlich gearbeitet wird. Sie stellt fest, dass diese beiden Konzepte bei den Teilnehmenden meist übereinstimmen und in der Testbearbeitung sowie in Interviews häufig lediglich eine Definition genutzt wird, statt abzuwägen welche Definition für entsprechende Aufgaben am besten geeignet ist (Brown 2005, S. 194).

Die nun folgenden von Brown identifizierten Problemfelder stehen im Zusammenhang mit unterschiedlichen Erklärungsmodellen der Studienteilnehmenden. Diese Erklärungsmodelle werden von Brown in einem Verstehensmodell zusammengefasst, dass am Ende dieses Abschnittes erläutert wird.

Brown stellt fest, dass sich das Winkelkonzept beim Übergang von der Deutung des Sinus am rechtwinkligen Dreieck hin zur Deutung des Sinus am Einheitskreis grundlegend ändert. Die starre Auffassung eines Winkels als Teil eines Dreiecks wird erweitert durch die dynamische Vorstellung des Drehwinkels in einem Koordinatensystem. Im Umgang mit Drehwinkeln formuliert Brown drei Schwierigkeiten (Brown 2005, S. 199):

1. Das Einzeichnen eines Referenzdreiecks im Einheitskreis.
2. Das Verständnis des Rotationswinkels als unabhängige Variable der Sinusfunktion.
3. Das Einzeichnen eines Rotationswinkels im Koordinatensystem.

Eine weitere Schwierigkeit, mit der sich die Studienteilnehmenden konfrontiert sahen, liegt in der Unterscheidung des Sinus als Zahl und als Verhältnis von Zahlen.

> *Another issue is related to the definition of sine and cosine in terms of triangles, distances and coordinates. There is a very basic dichotomy at play. The sine or cosine of an angle is both a single number and a comparison between two numbers. (Brown 2005, S. 204)*

In Browns Studie hatten einige Teilnehmende Schwierigkeiten, die Darstellung eines Sinuswertes als Bruch mit der Deutung des Sinus am Einheitskreis in Einklang zu bringen. Die Darstellung des Sinuswertes $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$ weckte bei einer Studierenden die Vorstellung, der Sinus sei das Verhältnis zweier Seiten der Länge 3 und 5 in einem rechtwinkligen Dreieck (Brown 2005, S. 205). Dadurch war sie nicht in der Lage, diesen Quotienten als Wert des Sinus am Einheitskreis

zu deuten. Eine Darstellung in Dezimalschreibweise $\sin(\alpha) = 0,6$ hätte in diesem Fall möglicherweise andere Assoziationen geweckt. Dieses Problem hängt laut Brown damit zusammen, dass das Verhältnis in der Definition des Sinus am Einheitskreis im Verborgenen bleibt.

Algebraische Ausdrücke haben im kartesischen Koordinatensystem geometrische Entsprechungen. Brown (2005) spricht in diesem Zusammenhang von der *Cartesian Connection*. So kann beispielsweise dem Ausdruck $y_2 - y_1$ im Koordinatensystem eine gerichtete Strecke auf der y-Achse zugeordnet werden. Ähnlich verhält es sich in der Trigonometrie mit den Koordinaten eines Punktes $P = (x, y)$ auf dem Einheitskreis. Diesen Koordinaten können die Längen einer Strecke vom Punkt P zur y-Achse bzw. zur x-Achse zugeordnet werden. Diese Interpretation der Punktkoordinaten ist notwendig, um die Deutung am Einheitskreis und am rechtwinkligen Dreieck zu verknüpfen. Es zeigt sich, dass diese Verknüpfung einigen Lernenden Schwierigkeiten bereitet. Diese Studierenden arbeiten nicht aktiv mit den Koordinaten als Streckenlängen. Andere hingegen haben Probleme damit sich von der Vorstellung der Streckenlängen zu lösen und Sinus und Kosinus allein als Koordinaten des Punktes zu deuten.

Im Hinblick auf den Übergang vom Einheitskreis zur Sinusfunktion konnte Brown beobachten, dass nur die Hälfte der Teilnehmenden einem Punkt auf dem Einheitskreis einen korrekten Punkt auf dem Graphen der Sinusfunktion zuordnen konnte. Diejenigen, die den korrekten Punkt zuordnen konnten, bekamen Schwierigkeiten, wenn sie dazu aufgefordert wurden zu erklären, welche Größen auf der x- und der y-Achse dargestellt werden. Einige Studierende konnten nicht sagen, dass die x-Achse das Winkelmaß darstellt und die y-Achse die Höhe bzw. die y-Koordinate des entsprechenden Punktes auf dem Einheitskreis.

Auf der Grundlage der oben genannten Problemfelder, die jeweils verschiedene Erklärungsmodelle des Sinus nutzen, entwickelt Brown ein Verstehensmodell, in dem der Sinus am Einheitskreis auf drei unterschiedliche Arten dargestellt wird:

1. Der Sinus als Verhältnis von Seitenlängen in einem rechtwinkligen Referenzdreieck.
2. Der Sinus als Abstand eines Punktes auf dem Einheitskreis zu den Achsen.
3. Der Sinus als Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis.

Die von Brown identifizierten Verstehensmodelle stehen in Beziehung zu der von Salle und Frohn (2017) formulierten Einheitskreisvorstellung mit und ohne einbeschriebenem Dreieck (vgl. Abschnitt 2.2.5). Die Ausschärfung der Einheitskreisvorstellung in Abschnitt 4.6 bezieht die Überlegungen von Brown mit

ein und formuliert zu Punkt 1. und Punkt 3. ihres Verstehensmodells neue Grundvorstellungen.

Am Ende ihrer Arbeit bemerkt Brown, dass der Unterschied in diesen Deutungen zunächst nicht gravierend zu sein scheint und die Gefahr besteht, dass geübte Mathematikschaffende und erfahrene Lehrende diesen Unterschied nicht mehr wahrnehmen, da sie keine Notwendigkeit sehen, zwischen diesen Darstellungen zu differenzieren. Lernenden können diese Unterschiede allerdings Probleme bereiten. Daher ist es hilfreich diese Nuancen zu berücksichtigen, um typische Fehler frühzeitig zu erkennen und den Schülern und Schülerinnen die Inhalte der Trigonometrie verständnisorientiert zugänglich zu machen.

2.2.2 Weber – Prozept

Einen anderen Ansatz, um das Verständnis von Studierenden im Bereich der Trigonometrie zu erfassen, verfolgt Weber (2005). Dafür nutzt er als didaktisches Modell den von Gray und Tall (1994) geprägten Begriff des *Prozepts*, der von ihnen wie folgt beschrieben wird:

> *the amalgam of three components: a process that produces a mathematical object, and a symbol which is used to represent either process or object.* (Gray & Tall 1994, S. 121)

Das Wort Prozept ist eine Neuschöpfung, welches aus den beiden Wörtern Prozess und Konzept zusammengesetzt ist. Ein Prozept kann als verinnerlichter Prozess, Prozedur oder Handlung verstanden werden, der/die so tief verankert ist, dass der Lernende damit wie mit einem Objekt operieren kann. Das heißt, die Lernenden können zum Beispiel Merkmale eines Prozesses verändern und die Konsequenzen vorhersagen, ohne den Prozess selbst komplett zu durchlaufen.

Weber beantwortet in seiner Studie die Fragen, welche Prozesse sich Studierende hinter dem Begriff Sinus vorstellen und ob sie in der Lage sind, trigonometrische Funktionen als Prozept zu begreifen. Webers theoretische Arbeit mit dem Begriff des Prozepts im Zusammenhang mit dem Sinus liefert eine neue Perspektive auf die Darstellungen des Sinus am Einheitskreis und am rechtwinkligen Dreieck. Er unterscheidet zwischen der symbolischen Darstellung, dem dahinterliegenden Prozess und dem mathematischen Objekt und gibt der didaktischen Arbeit mit mathematischen Darstellungen dadurch eine begriffliche Klarheit. Da Darstellungen mathematischer Objekte in der vorliegenden Arbeit

als Träger von Grundvorstellungen fungieren, erweist sich diese begriffliche Trennung als sachdienlich.

Um trigonometrische Funktionen als Prozept zu begreifen, stellt Weber zunächst die Prozesse vor, die hinter dem Sinusbegriff stecken. Studierende, die dazu aufgefordert werden den Wert für $\sin(20°)$ zu schätzen, können diese Aufgabe auf zwei unterschiedliche Weisen lösen:

- Sie konstruieren (mental oder auf einem Stück Papier) ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Winkel von 20°, schätzen die Länge der Gegenkathete und der Hypotenuse des so konstruierten Dreiecks und bemerken, dass die Hypotenuse ungefähr dreimal so lang ist wie die Gegenkathete. Anschließend bilden sie das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse und erhalten einen Wert von $\frac{1}{3}$.
- Sie konstruieren (mental oder auf einem Stück Papier) einen Einheitskreis in einem Koordinatensystem. Schlagen einen Winkel von 20° auf, dessen Schenkel den Einheitskreis schneidet und bestimmen den y-Wert des Schnittpunktes. Auf diese Weise erhalten sie einen Wert von ca. 0,3.

In beiden Fällen ist das Symbol $\sin(20°)$ stellvertretend für einen Prozess, der wiederum ein bestimmtes mathematisches Objekt liefert. Im Fall des Sinus können diese Objekte die y-Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis oder das Seitenverhältnis in einem Dreieck sein (vgl. Abbildung 2.1). Weber argumentiert, dass das Begreifen trigonometrischer Funktionen als Prozept nicht nur hilfreich ist, um Werte der Funktionen zu schätzen, sondern auch, um Eigenschaften der Sinusfunktion zu begründen, beispielsweise, dass $\sin\left(270^{\circ}\right) = -1$ oder dass die Sinusfunktion keine Werte größer als 1 annehmen kann.

Um herauszufinden, wie sich unterschiedliche Lehrmethoden auf die Entwicklung prozeptuellem Wissens auswirken, führt Weber eine Vergleichsstudie mit einem Pre- und Posttest durch, bei der zwei Klassen im Bereich der Trigonometrie geprüft wurden. Eine der Klassen erhält eine Standardeinführung in die Trigonometrie, die andere verfolgt einen experimentellen Ansatz, der darauf ausgelegt ist prozeptuelles Denken zu fördern. Weber nutzt dazu unter anderem Arbeitsblätter, in denen zeichnerisch der Wert der Sinusfunktion am Einheitskreis bestimmt werden soll. Der Pretest besteht aus vier offen Fragen, in dem die Schülerinnen und Schüler beschreiben, was sie sich unter dem Sinus vorstellen. Der Posttest besteht aus fünf Fragen in denen unter anderem begründet werden soll, warum die Gleichung $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ gilt. Weber stellt erwartungsgemäß fest, dass Schülerinnen und Schüler aus der experimentellen Gruppe besser dazu in der

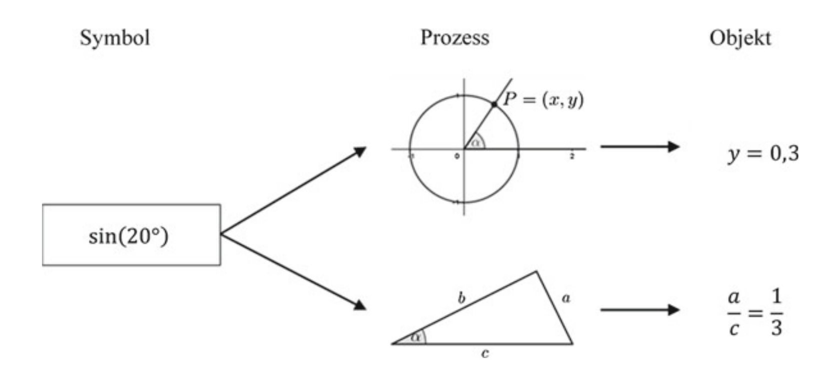


Abbildung 2.1 Sinus als Prozept

Lage waren, bestimmte Eigenschaften der Sinusfunktion zu begründen. Außerdem brachten sie Werte der Sinusfunktion mit entsprechenden geometrischen Prozessen in Verbindung, wodurch eine inhaltliche Deutung möglich war.

2.2.3 Burch – trigonometrische Schemata

Burch (1981) untersucht in seiner Arbeit die kognitiven Strukturen, die beim Lernen von Trigonometrie konstruiert werden. Dazu entwickelt er zunächst auf theoretisch-normativer Ebene Schemata zu trigonometrischen Funktionen, die später zur Analyse von Problemlösestrategien genutzt werden. Diese Schemata entspringen der Theorie der kognitiven Strukturen nach Skemp (1987) und basieren auf drei Interpretationen der trigonometrischen Funktionen:

1. Die Interpretation am rechtwinkligen Dreieck.
2. Die Interpretation im Koordinatensystem.
3. Die Interpretation am Einheitskreis.

Daraus entwickelt er das R-Schema für rechtwinklige Dreiecken, das C-Schema für das Koordinatensystem, das U-Schema für den Einheitskreis und das T-Schema, welches die Verbindung zwischen dem U- und C-Schema herstellt. R steht für *right angled triangel*, C für *coordinate system*, U für *Unit Circle* und T für *trigonometry*. Die von Burch entwickelten kognitiven Schemata stehen im Zusammenhang mit den Darstellungen des Sinus am rechtwinkligen Dreieck, am

Einheitskreis und als Funktionsgraph. Ein trigonometrisches Schema wird von Burch graphisch durch ein Netzwerk von Knoten und Kanten dargestellt (vgl. Abbildung 2.2). Die Knoten des Graphen entsprechen mathematischen Konzepten, die für einen verständigen Umgang entscheidend sind. Die Verbindungslinien zwischen den Knoten symbolisieren Operationen, die diese Zustände miteinander verbinden. Die Schemata bilden, so betrachtet, ein Modell für das Netzwerk an Grundvorstellungen, das notwendig ist um tragfähige sekundäre Grundvorstellungen aufzubauen (vgl. Abschnitt 3.2). Diese Schemata werden schließlich bei Burch dazu verwendet, Problemlöseprozesse zu analysieren. Es folgt nun eine Darstellung des R-Schemas. Das R-Schema basiert auf der Definition der trigonometrischen Funktionen an rechtwinkligen Dreiecken:

Ist α ein Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck und a die Gegenkathete, b die Ankathete und c die Hypotenuse, dann gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}, \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c}, \quad \tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

Burch identifiziert vier mathematische Konzepte, die in dem R-Schema enthalten sind. Diese Konzepte werden im Schema durch Knotenpunkte dargestellt und können unterschiedliche Ausprägungen annehmen. Diese mathematischen Konzepte können elementar sein oder bei genauerer Analyse selbst wieder in kleinere Struktureinheiten zerfallen. Das Verständnis des R-Schemas hängt also grundlegend mit der Verknüpfung dieser vier mathematischen Konzepte zusammen.

1. *Winkelmaß* (AM)
   Gradmaß
2. *Rechtwinklige Dreiecke* (RT)
   Das Konzept eines rechten Winkels
   Kenntnis über die Begriffe Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse
3. *Länge* (L)
   Länge von Strecken
4. *Verhältnis* (R)
   Kenntnis über die speziellen trigonometrischen Verhältnisse
   Kehrwertbildung
   Äquivalenz von Brüchen
   Umkehrfunktion

In der folgenden Abbildung 2.2 ist das R-Schema mit den vier Knoten AM, RT, L und R und den jeweiligen Verbindungslinien zu sehen. Insgesamt befinden sich elf unterschiedliche Verbindungslinien im Schema. Beispielsweise kann die Verbindungslinie *Calculator* zwischen AM→R und R→AM gefunden werden. Diese Verbindung stellt die Benutzung eines Taschenrechners dar, mit dem entweder aus dem Winkelmaß trigonometrische Verhältnisse oder aus den trigonometrischen Verhältnissen das Winkelmaß berechnet wird. Andere Operationen sind das Konstruieren von rechtwinkligen Dreiecken aus den Seitenlängen L→RT (Construct), das Bilden von Verhältnissen aus den Seitenlängen L→R (Form Ratio) oder das Lösen von trigonometrischen Gleichungen zum Berechnen der Seitenlängen R→L (Solve).

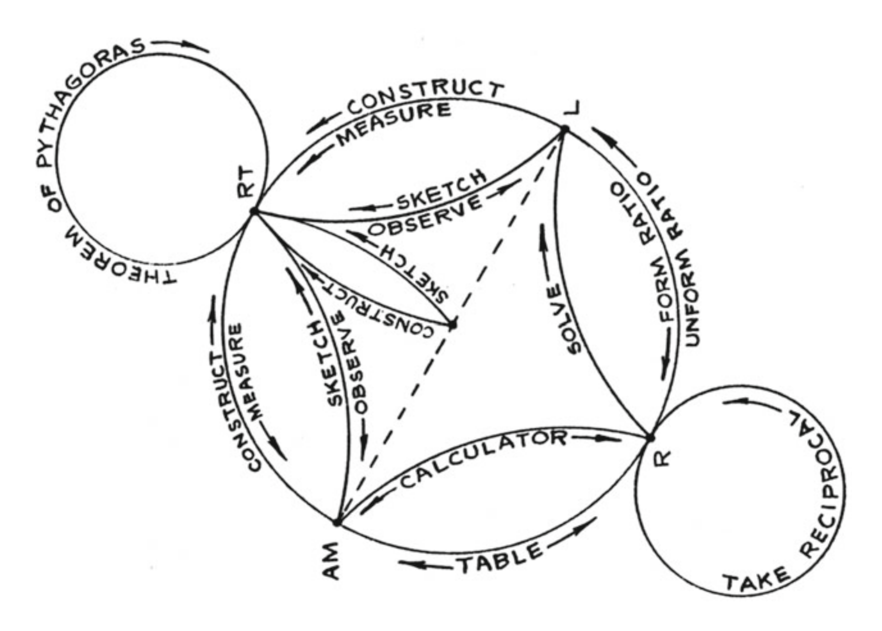


Abbildung 2.2 Das R-Schema (Burch 1981)

Burch formuliert außerdem eine Reihe von Routineaufgaben, die mit dem R-Schema gelöst werden können. Jeder dieser Aufgaben ordnet er einen Pfad im Schema zu, bestehend aus einer Kette von Zuständen, die jeweils mit Operationen verbunden sind (vgl.Abbildung 2.3). Eines der Probleme lautet:

$$Sei\ tan(\theta) = \frac{3}{2} = 1,5.\ Bestimme\ cos(\theta)$$

Zur Lösung dieser Aufgabe existieren vier Wege im R-Schema.

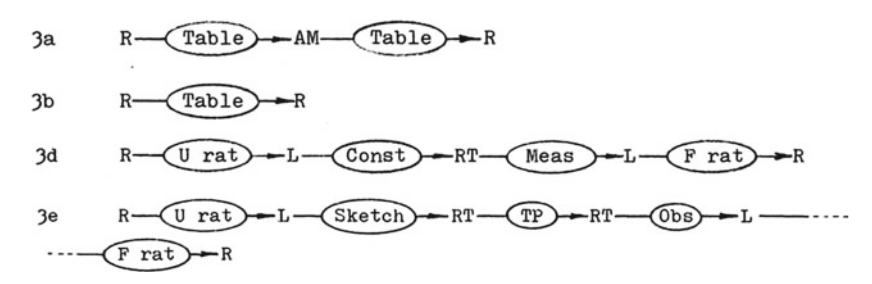


Abbildung 2.3 Lösungspfade im R-Schema (Burch 1981)

An der Studie nahmen insgesamt sechs Studierende teil, davon vier Männer und zwei Frauen. Von diesen sechs Teilnehmenden hatten zwei sehr gute Noten (A-students) in Mathematik, zwei sehr schlechte (D-students) und zwei mittelmäßige (B-, C- students). Jeder von ihnen wurde viermal jeweils eine Stunde lang zu einem der vier Schemata interviewt. Die Fragen der Interviews bildeten die von Burch formulierten Routineaufgaben, mit dazugehörigen Detailfragen. Zur Analyse wurden dann im theoretischen Modell gebildeten Lösungspfade herangezogen und mögliche neue Lösungspfade, die in den Interviews auftauchten, festgehalten. Auf diese Weise rekonstruierte Burch die individuellen Schemata der Teilnehmenden zu dem gegebenen Inhalt. Dabei stellte er fest, dass sich bei Teilnehmenden mit sehr guten mathematischen Leistungen ein vollständigeres Schema zeigte, als bei Teilnehmenden mit schlechten mathematischen Leistungen. Das heißt, dass die Schemata der leistungsstarken Teilnehmenden mehr Knotenpunkte und Verbindungen besaßen.

2.2.4 Fi – fachliches und fachdidaktisches Wissen und die geplante Umsetzung der Inhalte im Unterricht

Fi (2003) widmet sich in seiner Studie der Frage, in welcher Beziehung Fachwissen und fachdidaktisches Wissen von angehenden Mathematiklehrenden der

Sekundarstufe zur geplanten Umsetzung der Inhalte im Unterricht steht. Es handelt sich dabei um eine explorative Studie, bei der unterschiedliche Methoden zum Einsatz kommen und eine umfangreiche Sammlung an fachlichen Testitems entwickelt wurde.

Dazu erhebt er Daten von insgesamt 14 angehenden Mathematiklehrenden, die bereits an Methodenkursen für den Unterricht teilgenommen und Erfahrungen im Unterrichten gesammelt haben. Die erste Phase der Datenerhebung besteht aus drei Teilen:

1. Ein Test zum Fachwissen im Bereich der Trigonometrie.
2. Eine Kartensortieraktivität zum überprüfen des fachdidaktischen Wissens.
3. Die Anfertigung zweier Mindmaps.

Der Test zum Fachwissen war so konzipiert, dass man ihn ohne Taschenrechner lösen konnte. Darin enthalten waren Fragen, die auf das konzeptuelle Verständnis trigonometrischer Inhalte abzielen. Inhaltlich wurden die folgenden Bereiche abgedeckt (Fi 2003, S. 46): Definitionen und Terminologien, Winkel und Bogenmaß, Umkehrfunktionen, Drehwinkel, besondere Winkel (30°, 45°, 60°) und deren Sinuswerte, trigonometrische Funktionen und ihre Graphen, Werte- und Definitionsbereiche, Transformationen trigonometrischer Funktionen, gerade und ungerade Funktionen, Kosinussatz, Periodizität, trigonometrische Identitäten, Algebra und Analysis mit trigonometrischen Funktionen und der Nutzen trigonometrischer Funktionen beim Modellieren realer Prozesse.

Es gab zwei unterschiedliche Karten-sortier-Aktivitäten. In der ersten wurden 15 Karten mit Aussagen aus der Trigonometrie ausgeteilt. Diese Aussagen mussten auf drei Stapel verteilt werden. Auf dem ersten Stapel landeten die Karten mit Aussagen die “immer wahr” sind, auf dem zweiten Stapel die, die “manchmal war” sind und auf dem dritten Stapel die, die “nie wahr” sind. In der zweiten Karten-sortier-Aktivität ging es darum Karten mit trigonometrischen Begriffen in eine sinnvolle Reihenfolge zu bringen. Diese Aktivität war darauf ausgelegt, zu überprüfen, ob die Teilnehmenden sich bewusst darüber sind, inwieweit bestimmte mathematische Konzepte als Voraussetzung für andere Konzepte dienen. Wird bei dieser Aktion der Begriff „Koordinatensystem“ nach dem Begriff „Einheitskreis“ eingeordnet, wird dies als „out-of-place placement“ [falsche Einordnung] (ebd. S. 71) eingestuft. Die so gewonnenen Daten messen nach Fi die „prerequisite integrity“ [das Wissen über notwendige Vorkenntnisse].

Fi kommt zu dem Ergebnis, dass Lehrende, die den zu lehrenden trigonometrischen Konzepten nicht explizit die notwendigen Vorkenntnisse zuordnen können,

Probleme damit haben können, angemessene Unterrichtsplanungen zu entwickeln. Es kann ihnen schwerfallen, Fehler von Lernenden zu diagnostizieren und zu erklären. Auch können Schwierigkeiten auftreten, Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen trigonometrischen Aspekten und Darstellungen herzustellen. Insgesamt ist eine unzureichende Kenntnis der notwendigen Vorkenntnisse ein Indiz für schwaches fachdidaktisches Wissen (ebd. S. 207).

2.2.5 Frohn und Salle – Grundvorstellungen

Frohn und Salle (2017) formulieren in ihrem Artikel vier für die Schule relevante Grundvorstellungen zu Sinus und Kosinus: Die Verhältnisvorstellung, die Projektionsvorstellung, die Einheitskreisvorstellung und die Oszillationsvorstellung. Diese vier Grundvorstellungen werden in Beziehung zueinander und zu anderen Grundvorstellungen gesetzt, wodurch ein Blick auf das mentale Netzwerk der Grundvorstellungen im Bereich der Trigonometrie gegeben wird.

Die *Verhältnisvorstellung* knüpft an die Definition des Sinus als Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse am rechtwinkligen Dreieck an: „*In der Gleichung* $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ *interpretiert man den Bruch als Verhältnis von a zu c*“ (Frohn & Salle 2017). Damit baut diese Grundvorstellung auf der Grundvorstellung eines „Bruchs als Verhältnis“ auf. Der Sinus dient in diesem Zusammenhang als Werkzeug um unbekannte Größen in rechtwinkligen Dreiecken zu bestimmen.

Die *Projektionsvorstellung* knüpft auch an rechtwinklige Dreiecke an. In der Gleichung $b = \sin(\alpha) \cdot c$ wird $\sin(\alpha)$ als Faktor interpretiert, der angibt, wie stark sich die Strecke c unter einer orthogonalen Projektion verkürzt. Diese Vorstellung ist in der Physik nützlich, wenn es um die Projektion von Kräften geht, und taucht auch in der Definition des Skalarproduktes auf.

Die *Einheitskreisvorstellung* knüpft an die Definition des Sinus am Einheitskreis an. Salle und Frohn unterscheiden zwei Sichtweisen: mit und ohne einbeschriebenem Dreieck. Stellen Lernende sich ein einbeschriebenes Dreieck im Einheitskreis vor, so wird in der Gleichung $\sin(\alpha) = y$ das Verhältnis der Gegenkathete mit der Länge y zur Hypotenuse der Länge 1 gebildet. Ohne einbeschriebenes Dreieck hingegen liefert $\sin(\alpha) = y$ den y-Wert eines Punktes, der sich auf dem Einheitskreis bewegt. Der entsprechende Wert kann durch die Projektion auf die y-Achse erhalten werden.

Die *Oszillationsvorstellung* bezieht sich auf die Vorstellung der Sinusfunktion als Modellfunktion für periodische Prozesse. Sie baut auf der Vorstellung einer Funktion als Objekt auf, indem sie einen sich zeitlich ablaufenden Prozess als Objekt fassbar macht.

Neben diesen vier Grundvorstellungen weisen Salle und Frohn darauf hin, dass es durchaus noch weitere Grundvorstellungen geben kann, und nennen die Sinusfunktion in ihrer Potenzreihendarstellung sowie die Schwingungsdifferentialgleichung. Dabei lassen die Autoren die Frage offen, welche Sachzusammenhänge beziehungsweise empirischen Belege die Grundlage für diese Grundvorstellung bilden.

2.3 Forschungsdesiderata

Die ausgewählten Studien und deren Ergebnisse verdeutlichen, dass die Trigonometrie in mathematikdidaktischer Hinsicht großes Potential für die theoretische, wie auch für die empirische Forschung bereithält. Dies zeigt sich unter anderem in der theoretischen Auseinandersetzung mit fachlichen Aspekten trigonometrischer Funktionen, des Winkelmaßes und des Einheitskreises. Die entwickelten Verstehensmodelle, idealtypischen Lernwege und normativen Grundvorstellungen tragen weiterhin zu einer fachlichen wie auch didaktischen Durchdringung des mathematischen Inhaltes auf theoretischer Ebene bei.

In der empirischen Forschung können didaktische Theorien hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit auf trigonometrische Inhalte geprüft werden. Dadurch, dass der Trigonometrie in der didaktischen Forschung bisher wenig Beachtung geschenkt wurde, eignet sie sich besonders dafür, um Lehr- und Lernprinzipien auf unerforschte mathematische Inhalte anzuwenden und dadurch ihre Applikabilität und Allgemeingültigkeit zu überprüfen. Nach der Sichtung des derzeitigen Forschungsstandes lassen sich einige Themengebiete ausmachen, die bisher unerforscht oder lückenhaft blieben und deren Klärung einen substantiellen Beitrag zur mathematikdidaktischen Forschung leisten. Diese Themenbereiche werden in den folgenden Forschungsdesiderata zusammengefasst.

Forschungsdesiderat 1 – *Didaktisch orientierte Sachanalyse:* Allgemeine Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff wurden bereits 1989 von Vollrath formuliert und sind nach wie vor relevant in der aktuellen mathematikdidaktischen Forschung (Klinger 2018). Zu diesen Grundvorstellungen zählt die *Objektvorstellung*, die *Kovariationsvorstellung* und die *Zuordnungsvorstellung* (Vollrath 1989; Greefrath et al. 2016). Diese Vorstellungen können auf alle Funktionsklassen gleichermaßen angewendet werden. In jeder Funktionsklasse sind diese Vorstellungen allerdings mit charakteristischen Sachzusammenhängen sowie Denk- und Handlungsweisen verbunden, die wiederum als Ausgangspunkt neuer, differenzierter Grundvorstellungen dienen können. Um den Ursprung der Grundvorstellungen

zum Sinus (Frohn & Salle 2017) zu klären, benötigt es die Durchführung einer ausführlichen didaktisch orientierten Sachanalyse (Griesel 1971). Eine erste systematische Herleitung der Verhältnis- und der Projektionsvorstellung über geeignete Sachzusammenhänge wurde von Salle und Clüver (2021) durchgeführt. Eine umfassende didaktisch orientierte Sachanalyse, die auch die historisch epistemologische Genese und die Anwendungsfelder miteinbezieht, steht dagegen noch aus.

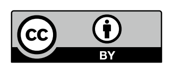
Forschungsdesiderat 2 – *Grundvorstellungskonzept:* Die in Abschnitt 2.2 untersuchten empirischen Arbeiten zur Trigonometrie nutzen als theoretische Grundlage das concept image, fachliches und fachdidaktisches Wissen, den Begriff des Prozept oder die Theorie der kognitiven Schemata. Die Analyse von Denkprozesse mithilfe von Grundvorstellungen ist bisher nicht durchgeführt worden. Es zeigt sich in anderen mathematischen Bereichen, dass das Grundvorstellungskonzept geeignet ist, um Schwierigkeiten beim Darstellungswechsel und bei Umbrüchen auf Vorstellungsebene zu erklären (Padberg & Wartha 2017) und Denkprozesse von Lernenden zu rekonstruieren (Kollhoff 2021). Daher scheint es vielversprechend, dieses Konzept auf den Sinus anzuwenden, der sich eben dadurch auszeichnet auf vielen unterschiedlichen Darstellungsebenen Bedeutung zu erlangen.

Forschungsdesiderat 3 – *Kooperatives Problemlösen*: Die wenigen qualitativen Studien, die Daten zum Umgang mit trigonometrischen Funktionen erhoben haben, arbeiten fast ausschließlich mit Interviews oder Fragebögen (Brown 2005; Weber 2005; Martín-Fernández et al. 2019). Es ließen sich keine Arbeiten finden, in denen Denkprozesse von Lernenden rekonstruiert wurden, die sich in kooperativen Arbeitssituationen befanden. Eine qualitative Beforschung kollaborativer Problemlösesituationen lässt erhoffen, einen natürlicheren und unverfälschten Einblick in die Aushandlungsprozesse von Bedeutung zu erlangen.

Forschungsdesiderat 4 – *Fachdidaktisches Wissen:* Es gibt kaum Studien, die sich mit fachdidaktischem Wissen im Bereich der Trigonometrie beschäftigen. Arbeiten, die das fachdidaktische Wissen erheben, haben entweder einen anderen inhaltlichen Schwerpunkt (Krauss et al. 2008; Schumacher 2017) oder das fachdidaktische Wissen wird mit sehr unspezifischen Testinstrumenten erhoben, die mathematisch relevante Details kaum erfassen (Fi 2003; Challenger 2009). Challenger untersucht das fachdidaktische Wissen durch die Anfertigung von concept maps, während Fi das fachdidaktische Wissen seiner Probanden mithilfe zweier Karten-sortier-Aktivitäten überprüft. Beide Autoren bilden damit hauptsächlich

den Bereich der *Sequenzierungskompetenz* mathematischer Inhalte ab. Der Teilbereich des *Erklärens und Darstellens* mathematischer Inhalte bleibt weitgehend unberücksichtigt. Die Konstruktion passender Testitems, die weitere Teilbereiche des Professionswissen angehender Lehrenden erfassen, würde dabei helfen, die Anforderungen des Lehramtsstudiums weiter zu konkretisieren und Divergenzen mit den tatsächlichen Kompetenzen der Lehrenden aufzudecken.

Die Forschungsdesiderata gliedern die vorliegende Arbeit in zwei Teile. Im Theorieteil werden Grundvorstellungen mithilfe einer didaktisch orientierten Sachanalyse hergeleitet. Im Empirieteil werden Fallstudien durchgeführt, bei denen sich Lehramtsstudierende in kooperativen Problemlösesituationen befinden. Anschließend werden die Denkprozesse der Teilnehmenden in einem rekonstruktiven Verfahren mithilfe des Grundvorstellungskonzeptes analysiert.





3 Konzeptioneller Rahmen der theoretischen Analyse

Die Zielsetzung des theoretischen Teils dieser Arbeit ergibt sich aus den ersten beiden Forschungsdesiderata des vorigen Abschnittes und liegt darin, eine didaktisch orientierte Sachanalyse durchzuführen und damit funktionsklassenspezifische Grundvorstellungen zum Sinus zu begründen und zu formulieren. Um dieses Ziel zu erreichen, wird in diesem Abschnitt eine Begriffsklärung vorgenommen und dargelegt, worum es sich bei Grundvorstellungen und mathematischen Darstellungen, die als Träger von Grundvorstellungen aufgefasst werden können, aus didaktischer Sicht handelt. Anschließend wird die Entwicklung der didaktisch orientierten Sachanalyse in der Mathematikdidaktik geklärt und damit klargestellt, was unter einer didaktisch orientierten mathematischen Sachanalyse verstanden werden kann. Abschließend wird aufgezeigt, wie die didaktisch orientierte Sachanalyse im Sinne des genetischen Prinzips umgesetzt werden kann.

3.1 Darstellungen mathematischer Objekte

Darstellungswechsel in der Mathematik situationsgerecht einzusetzen bzw. anzuwenden, sind entscheidende Fähigkeiten, die für die Ausbildung funktionalen Denkens notwendig sind (Bruner 1974; Duval 1993; Stölting 2008; Klinger 2018). Die flexible Verwendung unterschiedlicher Darstellungen kann außerdem zum Aufbau inhaltlicher Vorstellungen zu einem mathematischen Begriff beitragen (Prediger & Wessel 2013). Darüber hinaus zählt das *Verwenden von mathematischen Darstellungen* zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler gemäß den Bildungsstandards (KMK 2012) am Ende ihr Schulzeit erworben haben sollten.

V. Katter, *Historische, logische und individuelle Genese der Trigonometrie aus didaktischer Sicht*, Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik 10,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-41355-2_3

Im philosophischen Diskurs über die Grundlagendiskussion der Mathematik im frühen 20. Jahrhundert kommen Darstellungen mathematischer Objekte unterschiedliche Bedeutung zu. Diese Bedeutungen lassen sich im Kern auf die Frage zurückführen, ob mathematische Wahrheiten unabhängig von unserer Wahrnehmung und unserem Denken existieren. Eine Frage, die der Intuitionismus verneint und ihr die Annahme entgegen stellt, dass Mathematik ein Erzeugnis des menschlichen Geistes ist und nicht darüber hinaus geht (Heyting 1931). In diesem Sinne ist die Menge der Darstellungen eines mathematischen Objekts gleich dem mathematischen Objekt selbst. Eine konträre Sichtweise vertritt Duval (2006), der den mathematischen Objekten im platonischen Sinne eine Existenz außerhalb der menschlichen Wahrnehmung zukommen lässt. Nach Duval birgt das Lernen von Mathematik in sich ein unüberwindbares Dilemma, welches darin begründet ist, dass die mathematischen Objekte, die Gegenstand des Erkenntnisinteresses sind, dem Geiste niemals unmittelbar zugänglich sind, sondern nur mittelbar, über Darstellungen, an uns gelangen. Die Darstellungen des Objektes können jeweils nur Aspekte erkennbar machen. Daher ist es wichtig, das mathematische Objekt nicht mit einer seiner Darstellungen zu verwechseln. In dieser Unterscheidung zwischen mathematischem Objekt und seiner Darstellung liegt laut Duval das entscheidende Problem und die Herausforderung für den Lernenden:

> *How can they distinguish the represented object from the semiotic representation used if they cannot get access to the mathematical object apart from the semiotic representations?* (Duval 2006, S. 107)

Um die unterschiedlichen Darstellungen und das zugehörige mathematische Objekt voneinander zu unterscheiden und dadurch Klarheit darüber zu schaffen, wie mit Darstellungen umgegangen werden soll, führt Duval den Begriff des Registers ein. Register sind Darstellungssysteme in denen es erkennbare Regeln gibt, um Darstellungen zu bilden, Darstellungen umzuformen und Darstellung von einem ins andere Register zu übersetzen (Stölting 2008). Duval nutzt in seiner Arbeit beispielhaft das Register der natürlichen Sprache, der geometrischen Figuren, das formale Register und das Register der Graphen (Duval 2017). Prediger und Wessel (2013) unterscheiden zwischen dem *verbalen*, dem *graphischen*, dem *symbolisch-algebraischen* und dem *symbolisch-numerischen* Register. Bei den Darstellungen von Funktionen kann das Register der *Tabellen* hinzugezogen werden (Stölting 2008). Greefrath et al. (2016) Fassen die Darstellungsformen von Funktionen unter den fünf Begriffen *Realsituation, Text, Tabelle, Term* und *Graph* zusammen.

Neben den verschiedenen Registern, in denen ein mathematisches Objekt dargestellt werden kann, unterscheidet Duval (2006) zwischen dem *Sinn* und der *Bedeutung* einer Darstellung. Der Sinn einer Darstellung leitet sich maßgeblich von dem verwendeten Register ab und liegt darin, bestimmte Aspekte des mathematischen Objektes sichtbar zu machen. Die Bedeutung einer Darstellung bezieht sich auf das zu repräsentierende mathematische Objekt, das hinter dieser Darstellung steht. Funktionen werden beispielsweise oft analytisch durch einen Term dargestellt. Der Sinn dieser Darstellung liegt unter anderem darin, konkrete Werte der Funktion auszurechnen, mit denen wiederum Tabellen erstellt oder der Graph der Funktion skizziert werden können.

Der Begriff der Darstellungen steht im engen Zusammenhang zum Begriff der Vorstellungen. In beiden Fällen handelt es sich um Repräsentationen eines mathematischen Inhaltes. Bender (1991) schreibt zum Begriff der Vorstellungen folgendes:

> *Mit „Vorstellungen" bezeichnet man traditionell (innere) anschauliche Repräsentationen eines Objekts, einer Situation, einer Handlung usw., deren sensorische Grundlagen im Langzeitgedächtnis gespeichert sind und die in bewussten Prozessen aktiviert werden. Dabei wird ein solcher Prozess auf einen bestimmten Sinn hin organisiert, den der Vorstellende schon als Ziel mit einbringt.* (Bender 1991, S. 52)

Vorstellungen zählen aus deskriptiver Sicht zu den mentalen Repräsentationen, die vom Individuum konstruiert werden und in Hinblick auf ein bestimmtes Ziel aktiviert werden können. Bei Darstellungen handelt es sich vorwiegend um ikonische bzw. symbolische Repräsentationen, die in Form von Bildern oder Formeln vorliegen. Darstellungen können in diesem Sinne Vorstellungen aktivieren und dienen so als Vorstellungsträger. Dieser Zusammenhang spielt eine wichtige Rolle bei der Konstruktion von Grundvorstellungen. Im Folgenden wird auf den Begriff der Grundvorstellungen näher eingegangen.

3.2 Grundvorstellungen

Zur Klärung der individuellen Begriffsgenese von Lernenden leistet das Grundvorstellungskonzept einen entscheidenden Beitrag. Vom Hofe (1995) schreibt dazu:

> *In psychologischer Hinsicht erklärt die Annahme von Grundvorstellungen die individuelle Genese mathematischer Begriffe. In didaktischer Hinsicht dient die Beschreibung von Grundvorstellungen als Leitlinie zur Organisation von Mathematikunterricht.* (vom Hofe 1995, S. 82)

Grundvorstellungen sind demnach einerseits dazu geeignet, um individuelle Lernprozesse zu erklären, andererseits haben sie eine strukturierende Komponente, die zweckmäßig dazu eingesetzt werden kann den Unterricht zu entwickeln.

Charakterisierung des Grundvorstellungskonzepts: Das Grundvorstellungskonzept lässt sich historisch auf zwei Wurzeln zurückführen: Die sogenannte Rechendidaktik und die studiumsvorbereitende Mathematikdidaktik nach Felix Klein (vgl. vom Hofe & Blum 2016). Dabei unterscheiden sich diese beiden Wurzeln insbesondere durch die von ihnen untersuchten mathematischen Inhalte. Das Grundvorstellungskonzept in der Rechendidaktik des 19. Jahrhunderts ist als solches dafür konzipiert worden, um Zahlen und Rechenoperationen eine inhaltliche Deutung zu geben (vom Hofe & Fast 2015). Die Weiterentwicklung der Rechendidaktik im 20. Jahrhundert führte dazu, dass der Anwendungsbereich von Grundvorstellungen zu einem Großteil in der Grundschule zu verorten war:

> *Der Anwendungsbereich liegt im Wesentlichen in der Grundschule und in den unteren Klassen der Mittelstufe. Ansätze, wie eine Genese von Grundvorstellungen bei höheren Inhalten aussieht, sind bislang nur wenige zu finden.* (vom Hofe 1995, S. 101)

Das Grundvorstellungskonzept erlangte dadurch besonders im elementaren Arithmetikunterricht an Bedeutung. Zu elementaren Konzepten wie der Addition und Subtraktion, sowie zu etwas komplexeren Konzepten wie der Division, Multiplikation oder Bruchrechnung lassen sich anhand von konkreten Handlungserfahrungen wie das Zusammenfügen, Wegnehmen oder Aufteilen von Gegenständen, Grundvorstellungen konstruieren.

Parallel dazu entwickelte sich die studiumsvorbereitende Hochschuldidaktik nach Felix Klein (1924). Klein beabsichtigt in seinen Lehren mithilfe heuristischer Methoden Anschauungen zu mathematisch anspruchsvollen Begriffen, wie beispielsweise dem Integral, der Ableitung und Funktionen, bei den Lernenden aufzubauen. Er betont außerdem in seiner Arbeit die didaktische Relevanz mathematische Inhalte durch anschauliche Beispiele einzuführen und dadurch für den Lernenden greifbar zu machen. Dieser Ansatz wurde vermehrt zum Ende des 20. Jahrhunderts wieder aufgegriffen und stellte damit einen Gegenpol zur axiomatisch geprägten schulischen Lehrpraxis der neuen Mathematik in den 1960er

und 1970er Jahren dar. Heutzutage gibt es didaktische Arbeiten, die sich auf normativer und deskriptiver Ebene mit Inhalten der Sekundarstufe II beschäftigen. Untersuchungen befassen sich mit Grundvorstellungen zu Variablen (Malle & Wittmann 1993), Funktionen (Stölting 2008), Logarithmen (Weber 2016), zu Grenzwerten, Ableitungen und Integralen (Greefrath et al. 2016), zum Sinus (Frohn & Salle 2017), zu Gleichungen (Hischer 2020) und zur Exponentialfunktion (Katter & Alarcón Relmucao 2021). Diese Arbeiten identifizieren Mittel und Wege um komplexe mathematische Inhalte mit Sinn und Bedeutung zu füllen, indem sie an die Erfahrungen und das Vorwissen der Lernenden anknüpfen.

Vom Hofe (2003) sah in diesem Anknüpfen an bekannte Sachzusammenhänge einen wesentlichen Baustein für die Ausbildung von Grundvorstellungen und charakterisierte das Grundvorstellungskonzept durch drei zentrale Aspekte:

> *Erfassung der Bedeutung eines neuen mathematischen Begriffs, durch Anknüpfen an bekannte Sach- und Handlungszusammenhänge;*
>
> *Aufbau entsprechender mentaler Modelle, die den Begriff auf der Vorstellungsebene repräsentieren;*
>
> *Anwendung des Begriffs auf neue Sachsituationen (d. h. Modellierung).* (vom Hofe 2003, S. 7)

Diese Charakterisierung vereinigt normative und deskriptive Aspekte auf die nun genauer eingegangen wird.

Aspekte von Grundvorstellungen: Die Entwicklung des Grundvorstellungskonzepts in Deutschland steht in engem Zusammenhang mit der Entwicklung der pädagogischen und psychologischen Forschung in den Anfängen bis hin zur Mitte des 19. Jahrhunderts (vom Hofe & Blum 2016). Lange Zeit blieben Grundvorstellungen eine normative Kategorie, mit deren Hilfe fachlich geeignete Vorstellungen beschrieben wurden, die Lernende entwickeln sollen. Erst in den 80er Jahren, durch die wachsende Bedeutung von deskriptiven Studien in der Mathematikdidaktik, erweiterte sich das Grundvorstellungskonzept und wurde genutzt, um Unterrichtseinheiten zu analysieren oder Fehlermuster und Fehlvorstellungen von Lernenden zu diagnostizieren (vom Hofe 1995). Schließlich wurde durch die steigende Prominenz des Grundvorstellungskonzeptes die Konstruktion von Grundvorstellungen durch passende methodische Entscheidungen immer weiter in den Fokus gerückt. In Anbetracht dieser Entwicklung lassen sich drei Aspekte von Grundvorstellungen identifizieren (vom Hofe & Blum 2016):

- *Normativer Aspekt*: Grundvorstellungen sind das Ergebnis einer stoffdidaktischen Analyse und beschreiben das, was sich Lernende unter einem mathematischen Begriff vorstellen *sollen.* Es handelt sich um fachlich adäquate Vorstellungen, die den mathematischen Kern eines Begriffs erfassen. Sie dienen Lehrenden als normative Leitideen zur Planung und Durchführung von Unterricht.
- *Deskriptiver Aspekt*: Grundvorstellungen werden von Lernenden konstruiert. Sie beschreiben das, was sich Lernende *tatsächlich* unter einem mathematischen Begriff vorstellen und unterscheiden sich mitunter von den intendierten normativen Grundvorstellungen. Lehrende können mithilfe deskriptiver Methoden Grund- und Fehlvorstellungen von Lernenden diagnostizieren und Problemlöseprozesse analysieren.
- *Konstruktiver Aspekt*: Die tatsächlich ausgebildeten Individualvorstellungen die unter dem deskriptiven Aspekt zusammengefasst werden unterscheiden sich mitunter von den normativ intendierten Grundvorstellungen. Der konstruktive Aspekt beschäftigt sich mit der Frage, worauf diese *Divergenzen* zurückzuführen sind und wie sie sich beheben lassen. (vgl. vom Hofe 1995, S. 116 f.)

Grundvorstellungen sind Teil eines mentalen Netzwerkes, das sich in einem stetigen Wandel befindet. Um geeignete Grundvorstellungen aufzubauen, muss das Vorwissen der Lernenden in passender Weise mit einbezogen werden. Der konstruktive Aspekt hilft bei der Suche nach geeigneten Methoden zur Konstruktion von tragfähigen Grundvorstellungen und vermittelt zwischen den normativ intendierten und den individuell konstruierten Vorstellungen.

Primäre und sekundäre Grundvorstellungen: Während sich das Grundvorstellungskonzept Ende des 20. Jahrhundert immer größerer Beliebtheit erfreute, stellte sich die Frage, für welche mathematischen Inhalte neben der elementaren Arithmetik es sinnvoll ist, um normative Grundvorstellungen zu identifizieren. So wurden Grundvorstellungen zur Ableitung, zum Integral, zu Funktionen und zu Variablen bestimmt. Dabei zeigte sich bei einigen Inhalten, dass die Verknüpfung mit realen Handlungskontexten nicht immer möglich ist und darüber hinaus nicht den intendierten Vorstellungen entspricht. Einige mathematische Konzepte, wie die Ableitung, das Integral oder die Logarithmusfunktion, werden oft innermathematisch motiviert (Weber 2013; Greefrath et al. 2016; Roos 2020). Während also die Sinnkonstruktion zu hinreichend elementaren Konzepten der Arithmetik anhand konkreter Handlungserfahrungen mit realen Gegenständen vollzogen werden kann, werden bei zunehmend komplexeren mathematischen Konzepten

abstrakte Handlungen mit mathematischen und symbolischen Darstellungsmitteln benötigt. Um diesem wesentlichen Unterschied in der Konstruktion von Grundvorstellungen gerecht zu werden, wurde die Unterscheidung von primären und sekundären Grundvorstellungen vorgeschlagen (vom Hofe 1996; Hafner 2012; Weigand 2015; vom Hofe & Blum 2016).

- *Primäre Grundvorstellungen* geben mathematischen Begriffen einen Sinn durch das Anknüpfen an gegenständliche Handlungserfahrungen.
- *Sekundäre Grundvorstellungen* geben mathematischen Begriffen einen Sinn durch das Anknüpfen an mathematische Operationen mit symbolischen Objekten.

Konstruktion von Grundvorstellungen: Erst durch den Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen ist es Lernenden möglich, die Welt mit den Mitteln der Mathematik zu beschreiben (Prediger 2010). Wie stark verankert eine Grundvorstellung ist, hängt maßgeblich vom Umfang und von der Häufigkeit der Aktivierung der zugrundeliegenden Handlungserfahrung bzw. der mathematischen Operation ab (vom Hofe & Fast 2015). Bei primären Grundvorstellungen können Lernende auf eine Vielzahl von Erfahrungen zurückgreifen, die bereits im Vorschulalter gemacht wurden. Die so erworbenen Grundvorstellungen bilden daher ein solides Fundament für mathematisches Arbeiten. Bei sekundären Grundvorstellungen müssen die Lernenden mit den entsprechenden Kontexten und Operationen erst vertraut gemacht werden. Dies kann dazu führen, dass diese Grundvorstellungen anfälliger für Fehlinterpretationen bzw. den Aufbau von Fehlvorstellungen sind. Eine Möglichkeit den Aufbau von Grundvorstellungen zu fördern, liefern Schulz und Wartha (2011) mit ihrem Vier-phasen-modell, bei dem der Prozess vom konkreten zum gedanklichen Handeln unterstützt wird. Prediger (2010) beschreibt den Lernprozess zum Aufbau von Grundvorstellungen durch ein Vier-Stufen-Modell. Auf der ersten Stufe werden mathematische Modelle zu lebensweltlichen Situationen aufgebaut. Auf der zweiten Stufe werden formale Fragen durch inhaltlich-anschauliche Begründungen geklärt. Auf der dritten Stufe wird ein interpretationsfreies Kalkül entwickelt. Auf der vierten Stufe können alle drei Stufen flexibel genutzt werden.

Die Konstruktion tragfähiger Grundvorstellungen ist kein „passiver statisch-abbildhafter, sondern ein aktiver dynamisch-operativer Prozess“ (vom Hofe 1995, S. 103) und sollte durch das Anknüpfen an bekannte Sachkontexte durch den Lehrenden bewusst unterstützt werden. In anderen Worten:

> *Grundvorstellungen zu einem Begriff entwickeln sich etwa, wenn sich Lernende mit Phänomenen befassen, durch die Aspekte des Begriffs erfahrbar werden. (Greefrath et al. 2016, S. 17)*

Passende Phänomene zu einem mathematischen Begriff zu finden, die diesen zugänglich machen, wird umso schwieriger, je komplexer der mathematische Begriff ist. Das hat zur Folge, dass Grundvorstellungen im Primarbereich wesentlich elaborierter und besser durchdrungen sind als in der höheren Mathematik. Grundvorstellungen zu komplexen mathematischen Begriffen, wie beispielsweise der Ableitung, bauen auf beträchtlichen Vorkenntnissen auf und verzweigen sich sowohl nach unten als auch nach oben in mehrere Richtungen. Von besonderem Interesse sind in dieser Arbeit die allgemeinen Grundvorstellungen zu Funktionen, die im Folgenden näher erläutert werden.

Allgemeine Grundvorstellungen zu Funktionen: Bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurde im Rahmen der Meraner Reform die Ausbildung des funktionalen Denkens zu einer der Hauptaufgaben des höheren Mathematikunterrichts erklärt (Klinger 2018). Seitdem wurde die Funktionenlehre aus verschiedenen didaktischen Perspektiven betrachtet und analysiert. Dabei spielte die Frage nach den Charakteristika funktionalen Denkens stets eine wichtige Rolle. Stoye (1983) entwickelt aus den unterschiedlichen Darstellungen einer Funktion als mengentheoretisches Konstrukt, Tabelle, Funktionsterm oder Graphen normative Vorstellungen, die als Vorgänger der charakteristischen Grundvorstellungen einer Funktion angesehen werden können. Er spricht von der *kausalen* Vorstellung, der *kinematischen* Vorstellung und der *algorithmischen* Vorstellung. Vollrath (1989) gibt diesen Überlegungen in seinem Artikel „funktionales Denken" ein neues Gewand, indem er drei charakteristische Grundvorstellungen zu Funktionen vorstellt, die bis zum heutigen Tage in der Mathematikdidaktik Verwendung finden (Greefrath et al. 2016).

- Die *Zuordnungsvorstellung*: Funktionen werden genutzt, um eine Zuordnung zwischen Werten und Größen herzustellen. Im Schulkontext findet sich diese Vorstellung in der Formulierung: *Eine Funktion ordnet jedem x-Wert genau einen y-Wert zu.* Diese Vorstellung des Funktionsbegriffes wird besonders deutlich, wenn Funktionen in Tabellen dargestellt werden, kann aber auch in anderen Darstellungen wiedergefunden werden. Situationen, in denen diese Vorstellung eine Rolle spielt, sind beispielsweise Datenerhebungen, wie Messungen in einem Experiment oder schlicht das Ausrechnen eines bestimmten Funktionswertes mithilfe des Funktionsterms.

- Die *Kovariationsvorstellung*: Eine Funktion gibt an wie sich ein Wert in Abhängigkeit eines anderen Wertes verändert. Bei der Kovariationsvorstellung steht das Änderungsverhalten einer Funktion im Vordergrund. Das Änderungsverhalten exponentieller Funktionen lässt sich dadurch beschreiben, dass die Funktionswerte bei konstantem Zuwachs stets mit demselben Faktor multipliziert werden. Die Fläche eines Quadrates hingegen vervierfacht sich bei Verdopplung der Seitenlänge und periodische Funktionen reproduzieren in gleichen Abständen immer dasselbe Muster. Auch die Kovariationsvorstellung lässt sich auf verschiedenen Darstellungsebenen verdeutlichen.
- Die *Objektvorstellung:* Eine Funktion wird als Objekt wahrgenommen, mit dem operiert werden kann und das globale Eigenschaften wie Symmetrien, Steigungsverhalten oder Periodizität aufweist. Lernende, welche die Funktion als Objekt verstehen, können den Funktionsgraphen im Koordinatensystem verschieben, strecken und stauchen oder sind auf formaler Ebene dazu in der Lage eine Funktion mit anderen Funktionen zu verknüpfen.

Diese Grundvorstellungen können auf alle Funktionsklassen angewendet werden. Für jede Funktionsklasse lassen sich allerdings charakteristische Sachzusammenhänge herausarbeiten, die für die Lernenden sinngebend sein können und damit als Ausganspunkt für die Formulierung normativer Grundvorstellungen dienen können.

Sinnkonstruktion: Was genau von einer Person als sinnvoll eingestuft wird, ist individuell und hängt von diversen persönlichen Merkmalen ab (Vorhölter & Vollstedt 2012). Sinn kann in vielen verschiedenen Bereichen konstruiert werden. Sinn kann sich durch einen persönlichen Nutzen ergeben, den ein Konzept im Alltag erbringt, wie beispielsweise die Division beim Aufteilen von Süßigkeiten unter Freunden. Sinn kann aber auch rein innermathematisch ohne Alltagsbezug gegeben werden, zum Beispiel durch den Gebrauch von Matrizen statt Gleichungssystemen. Auf der anderen Seite kann Sinn in nutzlosen, aber ästhetischen Objekten gefunden werden, wie bei Symmetrien in Mandalas. Was für eine Person Sinn ergibt, kann für eine andere sinnlos sein. Was ist also gemeint mit Sinngebung und wie wird diese vollzogen?

Die wichtigsten Faktoren bei der Sinnkonstruktion zu einem mathematischen Begriff sind die persönlichen Vorerfahrungen: *„Schülerinnen und Schüler konstruieren ihren subjektiven und individuellen Sinn in Abhängigkeit von ihren Erfahrungen, Zielen und Wünschen“* (Vorhölter & Vollstedt 2012, S. 152). Dabei spielen sowohl persönliche Merkmale wie Fleiß, Motivation, Interesse oder mathematischer Denkstil, als auch persönliche Hintergrundmerkmale, etwa

der sozioökonomische Status oder der kulturelle Hintergrund, eine zentrale Rolle (Vorhölter & Vollstedt 2012). Anhand empirischer Interviewstudien entwickeln Vorhölter und Vollstedt ein zweidimensionales Modell der Typologie von Sinnkonstruktionen. Dazu wurden die Kategorien *Intensität der Individuumsbezogenheit* sowie *Intensität der Mathematikbezogenheit* gewählt, welche jeweils drei Niveaus (hoch, mittel, gering) annehmen können. Durch einen anschließenden Vergleich der Sinnkonstruktionen wurden sieben verschiedene Sinnkonstruktionstypen ermittelt:

- Erfüllung gesellschaftlich geprägter Anforderungen,
- Aktive Auseinandersetzung mit Mathematik,
- Effiziente und unterstützende Gestaltung von Unterrichtsprozessen,
- Kognitive Selbstentwicklung,
- Anwendungsrelevanz,
- Wohlbefinden durch eigene Leistung,
- Emotional-affektiv geprägte Entfaltung.

Diese Studie zeigt die Wichtigkeit affektiver und affirmativer Impulse beim Lernen mathematischer Inhalte. Vom Hofe schrieb dazu:

> *Das heißt nichts anderes, als dass der neu geschaffene Begriff eine individuelle Prägung hat, die mit Erfahrungen und Gefühlen zusammenhängt, die beim Lernen dieses Begriffs aktual waren.* (vom Hofe 1995, S. 107)

Neben den stark aufs Individuum bezogenen Sinnkonstruktionstypen, wie die emotional-affektiv geprägte Entfaltung, gibt es auch Faktoren, auf die Lehrende einen direkteren Einfluss haben. Von besonderem Interesse sind in der vorliegende Studie die effiziente und unterstützende Gestaltung von Unterrichtsprozessen, welche auf Grundlage normativ geprägter idealtypischer Lernwege entwickelt werden können und die Anwendungsrelevanz des zu unterrichtenden Themas, welche durch die in der Sachanalyse herausgearbeiteten Anwendungskontexte in Abschnitt 4.4 begründet ist.

Grundkenntnisse und Grundverständnis: Zu jeder Grundvorstellung, die von einem Lernenden zu einem mathematischen Begriff konstruiert wird, kommt eine Reihe von Grundkenntnissen, die im Umgang mit dieser Vorstellung entwickelt werden sollten. Diese Grundkenntnisse umfassen technische Fertigkeiten wie die Arbeit mit formalen Werkzeugen der Mathematik, inhaltliche Deutungen symbolischer Elemente und die Herleitung von Zusammenhängen zu anderen Konzepten der Mathematik. Das Netz, bestehend aus verschiedenen Grundvorstellungen und

deren Grundkenntnissen, wird auch als Grundverständnis eines mathematischen Begriffs bezeichnet (vom Hofe 2003). Weigand (2015) spricht in ähnlicher Weise vom Verständnis des Begriffsnetzes:

> *Ein Begriffsnetz kann zum einen die Beziehung zwischen verschiedenen Spezialformen des Begriffs aufzeigen […], zum anderen aber auch den Bezug eines Begriffs zu anderen Begriffen veranschaulichen.* (Weigand 2015, S. 266)

Grundvorstellungen und fachliche Charakterisierungen: Zur Klärung des Zusammenspiels von Aspekten der formalen und der semantischen Ebene, beschäftigen sich Greefrath, Oldenburg, Siller, Weigand und Ulm (2016) mit fachlichen Aspekten und Grundvorstellungen eines mathematischen Begriffs (vgl. außerdem Roos 2020). Sie definieren fachliche Aspekte und Grundvorstellungen wie folgt:

> *Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist ein Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann.*
>
> *Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.* (Greefrath et al. 2016)

Diese Unterscheidung dient Greefrath et al. als Basis für eine didaktisch orientierte Sachanalyse des Ableitung- und Integralbegriffes, sowie als Diskussionsgrundlage für den Zusammenhang zwischen fachlichen Charakterisierungen und individuellen Vorstellungen eines mathematischen Begriffes. Was mit einer didaktisch orientierten Sachanalyse gemeint ist und wie sich Grundvorstellungen aus dieser ergeben können, wird im nächsten Abschnitt besprochen.

3.3 Die didaktisch orientierte Sachanalyse

Die Bedeutung einer didaktisch orientierten Sachanalyse lässt sich gut erkennen, wenn sie von einer reinen Sachanalyse abgegrenzt wird. Die reine Sachanalyse beschäftigt sich mit der logischen Struktur eines mathematischen Inhaltes und durchdringt den Inhalt auf fachlicher Ebene. Im Gegensatz dazu handelt es sich bei der didaktisch orientierten Sachanalyse in erster Linie um ein Hilfsmittel, das einen Überblick über die unterschiedlichen Facetten eines mathematischen Inhaltes liefert. Dazu gehören nicht nur fachliche, sondern auch didaktische Aspekte. Zu den didaktischen Aspekten gehört beispielsweise die individuelle Konstruktion von Bedeutung zu einem mathematischen Begriff, klassische Phänomene, die

Konkretisierung mathematischer Inhalte im Schulunterricht oder typische Fehlermuster im Zusammenhang mit bestimmten mathematischen Inhalten. Der Ablauf einer solchen Analyse hängt stark vom untersuchten Inhalt und von den verfolgten Zielen ab. Dennoch lassen sich einige übergeordnete inhaltsunabhängige Prinzipien formulieren, die der didaktisch orientierten Sachanalyse einen Rahmen geben:

Die didaktische Analyse nach Klafki: Klafki (1958) unterscheidet zwischen dem Bildungsinhalt und dem ihm innewohnenden Bildungsgehalt. Ein Bildungsinhalt lässt sich vordergründig dadurch identifizieren, dass er in Lehrplänen auftaucht. Die Auswahl der Bildungsinhalte eines Lehrplans sollte allerdings bestimmte Kriterien erfüllen. Diese Kriterien fasst Klafki folgendermaßen zusammen:

> *Immer soll ein Bildungsinhalt Grundprobleme, Grundverhältnisse, Grundmöglichkeiten, allgemeine Prinzipien, Gesetze, Werte, Methoden sichtbar machen. Jene Momente nun, die solche Erschließung des Allgemeinen im Besonderen oder am Besonderen bewirken, meint der Begriff des Bildungsgehaltes.* (Klafki 1958, S. 14)

Bevor sich Lehrende mit der Umsetzung der im Lehrplan gesammelten Inhalte beschäftigen, geht also immer eine didaktische Vorentscheidung voraus, bei der aus der Fülle an Inhalten eines Fachbereiches geeignete Bildungsinhalte ausgesucht und in den Lehrplan aufgenommen werden. Die Aufgabe des Lehrenden besteht nach Klafki in einem ersten Schritt darin, in den Bildungsinhalt einzudringen und die bildenden Momente eines Inhaltes herauszuarbeiten. Eine *reine* Sachanalyse wird diesem Eindringen in den Bildungsinhalt nicht gerecht, da es mitunter passieren kann, dass in ihr die spezifische pädagogische Aufgabe aus dem Blick verloren geht und der Lehrende eine „vorpädagogische-fachwissenschaftliche Analyse“ durchführt. Anschließend muss durch eine didaktische Analyse der Bildungsgehalt bestimmt werden.

> *Die didaktische Analyse soll ermitteln, worin der allgemeine Bildungsgehalt des jeweils besonderen Bildungsinhaltes liegt. Dabei erweist sich der Bildungsgehalt fast immer als ein „Geflecht von Beziehungen“, als „eine Zusammenhangsbestimmtheit, ein Relationskomplex, der selbst wiederum in größeren … Zusammenhang gestellt ist…“.* (Klafki 1958, S. 14)

Die allgemeine Frage nach dem Bildungsgehalt strukturiert Klafki in fünf didaktische Grundfragen, die meist erst in der Praxis im Hinblick auf die jeweilige Schulklasse beantwortet werden können. Die Fragen sind nicht hierarchisch

geordnet, müssen also nicht in einer bestimmten Reihenfolge beantwortet werden, sondern ergänzen sich und stehen in wechselseitiger Beziehung zueinander.

1. *Welchen größeren bzw. welchen allgemeinen Sinn- oder Sachzusammenhang vertritt und erschließt dieser Inhalt? Welches Urphänomen oder Grundprinzip, welches Gesetz, Kriterium, Problem, welche Methode, Technik oder Haltung lässt sich in der Auseinandersetzung mit ihm „exemplarisch“ erfassen?*
2. *Welche Bedeutung hat der betreffende Inhalt im Leben der Kinder meiner Klasse, welche Bedeutung sollte er – vom pädagogischen Gesichtspunkt aus gesehen – darin haben?*
3. *Worin liegt die Bedeutung des Themas für die Zukunft der Kinder?*
4. *Welches ist die Struktur des (durch die Fragen 1 und 2 und 3 in die spezifische pädagogische Sicht gerückten) Inhaltes?*
5. *Welches sind die besonderen Fälle, Phänomene, Situationen, Versuche, in oder an denen die Struktur des jeweiligen Inhaltes den Kindern dieser Bildungsstufe, dieser Klasse interessant, frag-würdig, zugänglich, begreiflich, „anschaulich“ werden kann.* (Klafki 1958, 15–20)

Diese Fragen lassen sich mithilfe der folgenden Stichwörter zusammenfassen: Sinnzusammenhang, aktuelle Bedeutung für die Lernenden, zukünftige Bedeutung für die Lernenden, Struktur des Inhaltes und typische Phänomene.

Die didaktisch orientierte Sachanalyse nach Kirsch: In den 70er und 80er Jahren wurden didaktisch orientierte Sachanalysen genutzt, um Inhalte zu strukturieren und für den Unterricht zugänglich zu machen (Vollrath 1987). Im „zugänglich machen“ eines mathematischen Inhaltes sieht Kirsch (1977) die Hauptaufgabe der didaktisch orientierten Sachanalyse und charakterisiert diese durch vier zentrale Aktivitäten:

- *Konzentration auf den Kern eines mathematischen Inhaltes*
- *Miteinbeziehen von inhaltsnahen Phänomenen*
- *Rückgriff auf das Vorwissen der Lernenden*
- *Wechsel der mathematischen Darstellungen*

Mit der *Konzentration auf den Kern eines mathematischen Inhaltes* meint Kirsch nicht die vollständige Axiomatisierung eines mathematischen Begriffs. Vielmehr geht es ihm um die geeignete Wahl einer mathematischen Definition, die dem Verständnis zuträglich ist, und nicht dem Vereinfachen der deduktiven Struktur nutzen soll, denn „strukturelle Vereinfachung kann den Zugang auch erschweren“

(Kirsch 1977, S. 152). Das *Miteinbeziehen von inhaltsnahen Phänomenen* ist insofern wichtig, da es aus lerntheoretischer Perspektive die Motivation der Lernenden fördert und dadurch ein besserer Lerneffekt erzielt wird. Dabei soll auch vor komplizierten Anwendungen nicht zurückgeschreckt werden, da „nach aller Erfahrung eine gewisse *Kompliziertheit* Schüler und Lehrer *nicht so abschreckt wie* übermäßige *Abstraktheit*." (Kirsch 1977, S. 153). Der *Rückgriff auf das Vorwissen der Lernenden* macht neue Lerninhalte für den Mathematikunterricht überhaupt erst zugänglich. Dieser Aspekt steht im Kontrast zur axiomatischen Einführung bestimmter Begriffe, wie sie in Mathematikvorlesungen gepflegt wird, die nicht zuletzt häufig mit der Aufforderung beginnen, alles zu vergessen, was man bisher über die Mathematik gelernt hat. Abschließend weist Kirsch auf die Wichtigkeit des *Darstellungswechsels* hin und kritisiert die rein formale mathematische Darstellung mancher Inhalte, bei denen die Schwierigkeit in der Formulierung und Symbolisierung steckt und nicht etwa in der Sache selbst.

Die didaktisch orientierte mathematische Sachanalyse nach Salle und Clüver: Salle und Clüver (2021) nutzen die didaktisch orientierte Sachanalyse um Grundvorstellungen als normative Leitlinie zu einem mathematischen Inhalt herzuleiten. Sie entwickeln ein sachanalytisches Vorgehen, bestehend aus fünf Schritten, das als flexibel zu durchlaufender Kreislauf verstanden wird. Dabei werden „*Kernelemente der mathematischen Definitionen mit den Phänomenen in Beziehung gebracht*" (Salle & Clüver 2021, S. 11). Die einzelnen Schritte dieses Kreislaufs lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. *Bestimmung von Richtlinien für den Herleitungsprozess*
2. *Sachanalyse des mathematischen Begriffs und seiner Phänomene sowie Einbezug empirischer Ergebnisse*
3. *Formulierung konkreter Grundvorstellungen*
4. *Präzisierung des Bezugsrahmens*
5. *Feststellung und Bewertung der didaktischen Relevanz* (Salle & Clüver 2021, S. 12)

Im ersten Schritt werden die *Richtlinien* bestimmt. Diese Richtlinien umfassen den *Gültigkeitsbereich* und den *Bezugsrahmen* der mathematischen Begriffe, zu denen Grundvorstellungen formuliert werden sollen. Der Gültigkeitsbereich eines Begriffs gibt dessen mathematische Reichweite an (Salle & Clüver 2021). Beispielsweise ist die Deutung des Sinus am rechtwinkligen Dreieck nur für Winkel im Intervall $(0°, 90°)$ gültig. Der Bezugsrahmen gibt an, welche Vorkenntnisse notwendig sind, um eine Grundvorstellung aufzubauen. Eine grundlegende Deutung des Sinus am Einheitskreis setzt beispielsweise die Kenntnis des kartesischen Koordinatensystems voraus.

Die im zweiten Schritt durchzuführende Sachanalyse eines mathematischen Begriffs umfasst drei Teile. Der erste Teil bezieht sich auf die Identifikation und Analyse geeigneter Definitionen, womit die innere mathematische Struktur des Begriffs geklärt wird. Im zweiten Teil werden relevante Sachzusammenhänge gesammelt, die aus Anwendungszusammenhängen oder der historischen Entwicklung eines Begriffs entspringen. Zuletzt werden empirische Ergebnisse berücksichtigt, die Hinweise auf die Bedeutung bestimmter Sachzusammenhänge für Lernende geben. Nachdem diese drei Teile ausführlich beleuchtet wurden, werden schließlich die ausgewählten Definitionen und Phänomene miteinander verglichen und Klassen gebildet.

Ausgehend von diesen Klassen werden im dritten Schritt neue Grundvorstellungen formuliert. Im vierten Schritt wird der Bezugsrahmen einer formulierten Grundvorstellung evaluiert, in Verbindung zu anderen Grundvorstellungen gesetzt und gegebenenfalls angepasst. Im fünften Schritt wird die didaktische Relevanz der identifizierten Grundvorstellungen bewertet. Dazu wird beispielsweise überprüft, ob sich die Grundvorstellungen auch tatsächlich bei Lernenden nachweisen lassen oder ob sie hilfreich sind, um Denkprozesse zu rekonstruieren.

Die didaktische Phänomenologie nach Freudenthal: Ein zentraler Punkt in allen drei vorgestellten Verfahren liegt darin, typische Phänomene, die den mathematischen Begriff greifbar machen, miteinzubeziehen. Mit Phänomenen sind im Allgemeinen mathematische oder reale Zusammenhänge gemeint. Die Integration von Phänomenen in den Lernprozess spielt auch bei Freudenthal (1983) eine wichtige Rolle. In seiner didaktischen Phänomenologie geht es darum, ausgehend von den Phänomenen, eine Ordnung zu schaffen, welche durch die mathematischen Begriffe strukturiert wird.

> *What a didactical phenomenology can do is to prepare the converse approach: starting from those phenomena that beg to be organised and from that starting point teaching the learner to manipulate these means of organising.* (Freudenthal 1983, S. 32)

Vollrath (1987) weist daraufhin, dass eine didaktische Sachanalyse in die didaktische Phänomenologie nach Freudenthal eingebettet werden kann und ihr dadurch ein Fundament verschafft wird.

> *Innerhalb einer didaktischen Phänomenologie erhält die didaktische Sachanalyse die Aufgabe, die mathematische Tragfähigkeit bestimmter Vorstellungen zu überprüfen und Zusammenhänge und logische Abhängigkeiten deutlich hervortreten zu lassen.* (Vollrath 1987, S. 251)

Um den Kern eines mathematischen Begriffs zu bestimmen, ist es also denkbar in einem ersten Schritt möglichst viele Anwendungskontexte zu bestimmen, in denen dieser mathematische Begriff eine Rolle spielt. In einem zweiten Schritt werden diese Anwendungskontexte geordnet und miteinander verglichen. Können Ähnlichkeiten zwischen unterschiedlichen Kontexten festgestellt werden, wird im dritten Schritt aus diesen Kontexten eine Klasse gebildet und anschließend überprüft, wie der mathematische Kern dieser Klasse beschrieben werden kann. Dieses Vorgehen kann zum Auffinden von Grundvorstellungen genutzt werden. Greefrath et al. schreiben dazu:

> *Die didaktische Phänomenologie kann als Leitlinie für die Entwicklung von Grundvorstellungen zu Begriffen dienen. Dabei geht es Freudenthal nicht um das Lehren eines in irgendeiner Weise abstrakt vorhandenen Begriffs, der durch unterschiedliche Darstellungen veranschaulicht oder mit Phänomenen erklärt wird, sondern er möchte ausgehend von Phänomenen Vorstellungen über Begriffe aufbauen. Phänomene sind die Ausgangspunkte für das Lehren und das Lernen.* (Greefrath et al. 2016, S. 43)

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die didaktisch orientierte Sachanalyse stets darauf bedacht ist Sachzusammenhänge aufzufinden, die als Grundlage dienen können, um geeignete Vorstellung aufzubauen. In dieser Hinsicht erinnert die didaktisch orientierte Sachanalyse an Vorgehensweisen genetischer Lehrmethoden, bei denen die Erfahrungen und das Vorwissen der Lernenden besonders berücksichtigt werden. Daher wird im nächsten Abschnitt das genetische Prinzip vorgestellt und auf dieser Grundlage ein möglicher Ablauf für eine didaktisch orientierte Sachanalyse entwickelt.

3.4 Das genetische Prinzip

Das genetische Prinzip bezeichnet in der Mathematikdidaktik eine Unterrichtsmethode zum Lehren mathematischer Inhalte. Der Begriff „*genetisch*" lässt sich vom griechischen Wort γένεσις (Genesis) ableiten, welches Herkunft/Ursprung bedeutet. Zu einem der wichtigsten Vertreter des genetischen Lernens gehört Martin Wagenschein, der lange Zeit als Mathematik- und Physiklehrer, aber auch in der Lehrerausbildung an Studienseminaren und Hochschulen tätig war und als solcher wichtige Beiträge zur Didaktik der Mathematik und Physik geleistet hat. Wagenschein kennzeichnet seine genetische Lehrmethode mit den drei Worten genetisch-sokratisch-exemplarisch (Wagenschein 1966). Dieser Methode folgend, sollen mathematische Inhalte im Unterricht exemplarisch durch reale Phänomene eingeführt werden. Die mathematische Theorie wird als Endprodukt eines

Verstehensprozesses gesehen, der sich primär mit erfahrbaren Gegebenheiten beschäftigt. Statt, wie es in der Fachmathematik üblich ist, ein Theoriekonstrukt erst axiomatisch einzuführen und dann anhand von Beispielen zu erläutern, geht es bei der genetischen Methode darum, die Theorie aus alltäglichen Problemen und Phänomenen zu entwickeln. Der Lernende nimmt bei einer genetisch orientierten Unterrichtsreihe die Rolle eines Entdeckers ein, der selbstständig Antworten auf die von ihm aufgeworfenen Fragen finden soll. Der Lehrende hingegen fungiert als Begleitperson, die ähnlich wie in einem sokratischen Dialog die Gedanken des Lernenden auf wesentliche Aspekte eines Problems lenkt, und ist nicht nur der Vermittler statischen Wissens. Wagenschein schreibt dazu:

> *Ein genetischer Lehrgang nun wird etwa dieselben Tatsachen und Theorien – nicht „bringen“, sondern – entdecken lassen. Er meint die eigentliche, die lebende, nicht die ihre Funde sichernde und zur Nutzung übersichtlich verwaltende Wissenschaft. Er verlässt sich darauf, „dass uns die Betrachtung der Natur zum Denken auffordert“.* (Wagenschein 1966, S. 334)

Vom Hofe beschreibt das genetische Prinzip weiter wie folgt:

> *Das genetische Prinzip stellt der Ansicht, Lerninhalte seien im Unterricht als Fertigprodukt vom Lehrer zu vermitteln, die Überzeugung gegenüber, dass sich Wissen und Fähigkeiten nur über eigenständige Lernprozesse in aktiver Auseinandersetzung mit den Lerninhalten entwickeln können.* (vom Hofe 1998, S. 260)

In diesem Sinne eignet sich das genetische Prinzip, um den Lernenden die erste wintersche Grunderfahrung zu ermöglichen und „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen“ (Winter 1996, S. 35). Möller (2001) unterscheidet weiter drei Aspekte der genetischen Methode: den individual genetischen, den historisch genetischen und den logisch genetischen Aspekt:

Der *individual genetische* Aspekt berücksichtigt den individuellen Wissensaufbau durch eigenständige Denkprozesse. Hier stehen die kognitive Entwicklung der Lernenden und die Genese des Wissens im Individuum im Vordergrund. Bei einer Unterrichtsplanung mit einem Fokus auf den individual genetischen Aspekt ist die Berücksichtigung des Vorwissens und Entwicklungsstandes der Lernenden von hoher Wichtigkeit. Bei der individuellen Genese kann außerdem zwischen der *normativ intendierten* Genese, die sich in den idealtypischen Lernwegen der

Schulcurricula widerspiegelt und der *individuell konstruierten* Genese, die sich bei jedem Individuum unterschiedlich vollzieht, unterschieden werden.

Der *historisch genetische* Aspekt beschäftigt sich mit der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik als Wissenschaft. In der Praxis kann es leicht passieren, dass bei einem historisch genetischen Unterrichtsentwurf die individual genetische Konstruktion von Wissen durch den Fokus auf die geschichtliche Entwicklung der Wissenschaft überschattet wird. Genetisch unterrichten bedeutet also nicht zwangsläufig die Geschichte zu unterrichten, dennoch kann der geschichtliche Werdegang eines mathematischen Begriffs einen genetischen Zugang begünstigen.

Der *logisch genetische* Aspekt eines mathematischen Inhaltes bezieht sich auf die Darstellung des Lehrgebiets innerhalb der Fachdisziplin Mathematik. Diese Art der genetischen Methode zeigt sich in mathematischen Fachvorlesungen, in denen ein Begriff deduktiv aus den vorher bewiesenen Sätzen und Axiomen hergeleitet wird. Diese Darstellung hat oft nur geringfügig mit der historischen Entwicklung zu tun. Auch die individual genetische Entwicklung wird häufig außer Acht gelassen. Es geht hier primär darum, ein konsistentes formales System aufzubauen, in das der Begriff fachlich korrekt eingebettet werden kann.

Diese drei Aspekte des genetischen Prinzips eignen sich als Grundlage, um eine didaktisch orientierte Sachanalyse durchzuführen und damit Grundvorstellungen zu einem mathematischen Begriff zu identifizieren (vgl. Abbildung 3.1). Im Falle des Sinus werden die Phänomene die den Sinusbegriff erfahrbar machen, in den folgenden Abschnitten zusammengetragen. Dies geschieht strukturiert in den Darstellungen der historischen, logischen und individuellen Genese. In einem nächsten Schritt werden die so gefundenen Sachzusammenhänge den Darstellungen der Sinusfunktion zugeordnet. Anschließend werden ausgehend von dieser Ordnung Klassen gebildet, durch die Aspekte des mathematischen Begriffs erfahrbar werden. Schließlich werden konkrete Grundvorstellungen formuliert

Der erste Schritt der didaktisch orientierten Sachanalyse umfasst die Abschnitte 4.1, 4.2, 4.3 und 4.4. Schritt zwei wird in Abschnitt 4.5 bearbeitet. Schritt drei und vier finden gemeinsam in Abschnitt 4.6 statt. Zu jeder gebildeten Klasse wird anschließend eine konkrete Grundvorstellung formuliert.

1 **Sammeln** von inhaltsnahen Phänomenen

Auf der Grundlage des genetischen Prinzips werden Phänomene ausfindig gemacht, die im Zusammenhang zum untersuchten mathematischen Begriff stehen. Dazu gehören z.B. schulische Aufgaben (normativ intendierte individuelle Genese), historische Beispiele/ Anwendungszusammenhänge (historische Genese) und mathematische Definitionen (logische Genese).

2 **Ordnen** der Phänomene nach Darstellungsformen

Die Phänomene werden unterschiedlichen Darstellungsformen des mathematischen Begriffs zugeordnet, darunter fallen z.B. geometrische Darstellungen, Funktionsgraphen und symbolische Darstellungen.

3 **Klassenbildung**

Phänomene werden zu Klassen zusammengefasst, durch die Aspekte oder Grundprinzipien des mathematischen Begriffs erfahrbar werden.

4 **Formulierung** konkreter Grundvorstellungen

Zu jeder Klasse werden konkrete Grundvorstellungen formuliert. Dazu gehören Grundkenntnisse, Grundprinzipien und die Verbindung zu anderen Grundvorstellungen.

Abbildung 3.1 Ablauf der didaktisch orientierten Sachanalyse

4 Didaktisch orientierte Sachanalyse der Trigonometrie

Die Herleitung von Grundvorstellungen durch eine didaktisch orientierte Sachanalyse ist ein in vieler Hinsicht offenes Forschungsfeld. Eine der wenigen Arbeiten die sich mit dieser Aufgabe auseinandersetzt, wurde von Salle und Clüver (2021) veröffentlicht und beschäftigt sich mit der Herleitung der Verhältnis- und Projektionsvorstellung des Sinus. Um die Ursprünge möglicher weiterer Grundvorstellungen zur Sinusfunktion auf normativer Ebene zu klären, wird in diesem Kapitel eine didaktisch orientierte Sachanalyse durchgeführt, wie sie in Abschnitt 3.4 beschrieben wurde. Im ersten Schritt wird die normativ intendierte individuelle Genese der Trigonometrie erkundet, indem die schulische Umsetzung der Inhalte untersucht wird. Dazu wird die Geschichte der Trigonometrie im mathematischen Unterricht mit einer abschließenden Betrachtung der aktuellen schulischen Umsetzung dargestellt. Ziel dieser Darstellung ist die Beantwortung folgender Fragen:

- Welche Rolle spielt die Trigonometrie in aktuellen und in früheren Lehrplänen?
- Welche Sachzusammenhänge werden in schulischen Aufgaben verwendet, um trigonometrische Inhalte zu vermitteln?
- Welche typischen schulischen Lernwege gibt es, um trigonometrische Funktionen einzuführen?

Nach dieser Darstellung wird die didaktisch orientierte Sachanalyse mit der Zusammenstellung inhaltsnaher Phänomene fortgesetzt. Diese inner- und außermathematischen Sachzusammenhänge werden aus der historischen und logischen Genese entnommen und durch relevante Anwendungskontexte angereichert.

V. Katter, *Historische, logische und individuelle Genese der Trigonometrie aus didaktischer Sicht*, Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik 10,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-41355-2_4

4.1 Zur Geschichte der Trigonometrie im mathematischen Unterricht

Anfang des 20. Jahrhunderts nahm die Trigonometrie eine bedeutende Stellung im mathematischen Unterricht höherer Schulen ein. Dem Entwurf eines mathematischen Lehrplans für die Oberrealschulen aus dem Jahr 1911 ist zu entnehmen, dass die Trigonometrie in der Untersekunda (Klasse 10) auftauchte. Dort heißt es in den „Lehraufgaben“:

> *Gegenseite Abhängigkeit von Seitenverhältnissen und Winkeln im rechtwinkligen Dreieck; Winkelfunktionen zahlenmäßig und zeichnerisch. Trigonometrische Aufgaben: Verbindung von Zeichnen, Messen und Rechnen.* (Schimmack 1915, S. 138)

In der Oberprima, der Abschlussklasse der Oberstufe, kommen die folgenden Lehraufgaben hinzu:

> *Ergänzung der Goniometrie und Trigonometrie. […] Das Wichtigste aus der sphärischen Trigonometrie in Verbindung mit mathematischer Erd- und Himmelskunde und der Lehre von Kartenprojektionen.* (Schimmack 1915, S. 139)

Diese Forderung, den mathematischen Unterricht im Gebiet der Erd- und Himmelskunde in der Oberprima als Krönung des Geometrieunterrichts ausklingen zu lassen, standen schon damals mehrere Umstände hinderlich im Wege. Zum einen bedarf es einer umfangreichen Klärung der himmelskundlichen Begriffe, zum anderen muss die Festigung dieser Grundbegriffe im Idealfall durch Beobachtungen unterstützt werden (Hoffmann 1915). Wie genau also die Inhalte zur damaligen Zeit in der Schule umgesetzt wurden, bleibt unklar; zumal die damaligen Lehrpläne aus dem Jahre 1901 mehr Wert auf methodische Bemerkungen als auf konkrete Lehraufgaben gesetzt haben (Hoffmann 1915).

Ein Blick in die Schulbücher der damaligen Zeit gibt einen Überblick über die intendierten Inhalte und schulischen Aufgaben der sphärischen Trigonometrie. Als typisches Beispiel sei das mathematische Unterrichtswerk von Reinhardt und Zeisberg (1929) genannt. In diesem Werk beschäftigt sich die sphärische Trigonometrie mit der Berechnung von Flächeninhalten und Seitenlängen in sphärischen Zweiecken und rechtwinkligen sowie schiefwinkligen sphärischen Dreiecken. Da in einem sphärischen Dreieck die Innenwinkelsumme stets größer als 180° ist, kann der Flächeninhalt mithilfe des sphärischen Exzesses $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$ berechnet werden. Die Flächeninhaltsformel für ein sphärisches Dreieck auf einer Kugel mit Radius r lautet dann

$$F = \pi r^2 \cdot \frac{\varepsilon}{180^\circ}$$

In dem Unterrichtswerk folgen sphärische Formulierungen des Kosinus- und Sinussatzes, die es erlauben, alle Größen eines sphärischen Dreiecks aus drei Seiten, zwei Seiten und einem Winkel, einer Seite und zwei Winkeln und drei Winkeln zu berechnen.

Im Abschnitt zur mathematischen Erd- und Himmelskunde werden zunächst die himmelskundlichen Begriffe geklärt. Dazu gehören beispielsweise geographische Breite und Länge, Himmelsachse, Scheitel- und Vertikallinie, Zenit, Nadir, Median, Azimut und Deklination. Aufgaben aus dem Bereich der Himmelskunde beschäftigen sich mit der Berechnung der genannten Größen oder, etwas konkreter, mit der Berechnung der Sonnenaufgangszeiten aus dem Jahrestag und der geographischen Breite.

Zur Mitte des 20. Jahrhunderts hin nahm die Bedeutung der sphärischen Trigonometrie auch im mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig der Gymnasien zunehmend ab und verschwand schließlich aus den Lehrplänen. In einem ansonsten mathematisch sehr anspruchsvollen Unterrichtswerk aus dem Jahr 1959 (Fladt et al. 1959) gibt es z. B. kein Kapitel zur sphärischen Trigonometrie mehr. Dafür werden auf 13 der 209 Seiten des Buches die Winkelfunktionen behandelt. Daran anschließend folgt ein neunseitiger Abschnitt über die Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck. Dieser Trend – weg von trigonometrischen Inhalten – setzt sich bis in die heutige Zeit fort. Es folgt nun eine Darstellung der aktuellen Umsetzung trigonometrischer Inhalte im mathematischen Unterricht.

Aktuelle Umsetzung trigonometrischer Inhalte im mathematischen Unterricht: Um zu verstehen, wie Lernende im Bereich der Trigonometrie Bedeutung konstruieren, ist es zunächst hilfreich, die Probleme zu untersuchen, die in der Schule als Motivation dienen um den Sinus im Unterricht einzuführen. Dazu wurden unterschiedliche Mathematikbücher der Sekundarstufe I und II hinsichtlich der trigonometrischen Inhalte untersucht (Gersemehl et al. 2013; Dippel et al. 2016; Griesel et al. 2016). In diesen Schulbüchern kann zwischen innermathematischen Problemen und Problemen mit Realitätsbezug unterschieden werden. Diese Probleme stehen außerdem im Zusammenhang mit unterschiedlichen Darstellungen: Im Einzelnen sind das rechtwinklige Dreiecke, der Einheitskreis und der Graph der Sinusfunktion. Die mathematischen und die anwendungsorientierten Probleme, die als Zugang zu den trigonometrischen Verhältnissen am rechtwinkligen Dreieck oder zur Definition am Einheitskreis dienen können, werden in den folgenden Abschnitten besprochen.

Die Einführung trigonometrischer Verhältnisse am rechtwinkligen Dreieck: Die Einführung trigonometrischer Verhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken lässt sich im Schulunterricht auf zwei Weisen motivieren: anhand von *Problemen*

mit Realitätsbezug oder anhand *innermathematischer* Probleme. Als Lösung zu Problemen mit Realitätsbezug findet sich die Trigonometrie oftmals in eingekleideten Aufgabenstellungen wieder. Typische Themengebiete sind das Messen und Berechnen im Gelände, aber auch Anwendungen in der Technik und der Physik. Aufgabenformate aus dem Bereich „Messen und Berechnen im Gelände“ weisen mitunter historische Bezüge auf. So wird die Höhe von Pyramiden berechnet, wie es einst Thales von Milet tat (vgl. Abschnitt 4.2.3), oder es werden antike Messinstrumente, wie der Sextant oder der Jakobsstab, untersucht. Mithilfe dieser Messinstrumente können handlungsorientierte Unterrichtseinheiten durchgeführt werden, mit deren Hilfe den Lernenden ein verständnis- und motivationsfördernder Zugang zur Trigonometrie angeboten wird. Dazu wird in einigen Lehrwerken vorgeschlagen, mit den Schülerinnen und Schülern Ausflüge ins Freie zu unternehmen und trigonometrische Werkzeuge eigenständig zur Bestimmung der Höhe von Gebäuden zu nutzen (Griesel et al. 2016; vom Hofe et al. 2019). Darüber hinaus gibt es eine Fülle an Aufgaben in denen Bauwerke der unterschiedlichsten Art vermessen und berechnet werden, allen voran der schiefe Turm von Pisa, der aufgrund seiner markanten Schieflage ein naheliegendes Objekt für die Verwendung rechtwinkliger Dreiecke liefert. Weitere typische Aufgaben beschäftigen sich mit der Berechnung der Breite eines Flusses, der Steigung einer Straße oder der Länge des Landeanflugs eines Flugzeuges. Anwendungen aus der Technik und der Physik beziehen sich meist auf die Projektion von Kräften (vgl. Abschnitt 4.4.4).

Nachdem die Nützlichkeit der Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck durch anwendungsorientierte Aufgaben gerechtfertigt wurde, findet in den meisten Schulbüchern eine Mathematisierung der Zusammenhänge statt und innermathematische Probleme werden vermehrt thematisiert. Zu diesen innermathematischen Problemen gehört in erster Linie die Berechnung von unbekannten Größen in rechtwinkligen Dreiecken. Allerdings können darüber hinaus auch unbekannte Größen in dreidimensionalen geometrischen Objekten wie Quader, Würfel oder Pyramide mithilfe der trigonometrischen Verhältnisse berechnet werden. Das innermathematische Kernproblem, welches dahintersteht und den notwendigen Weg von der Satzgruppe des Pythagoras zum Sinus- und Kosinussatz verdeutlicht, lässt sich wie folgt formulieren:

> *An Körpern und Flächen lassen sich einerseits mittels des Satzes von Pythagoras viele genaue Berechnungen durchführen, andererseits kann man jedoch eine Reihe einfacher Dreiecke nicht berechnen, obgleich z.B. über Kongruenzsätze die Konstruktion eindeutig ist.* (Graumann 1987, S. 148)

Ein innermathematisch motivierter Lernweg, der in der Berechnung von unbekannten Größen in beliebigen Dreiecken endet, beginnt mit der Berechnung von Flächeninhalten einfacher geometrischer Figuren und soll an dieser Stelle skizziert werden.

In der Primarstufe lernen Schülerinnen und Schüler, Flächeninhalte von Rechtecken zu bestimmen und zu deuten. An diesem Punkt wird durch das Aufstellen von Formeln zur Flächenberechnung der Grundstein zum Umgang mit formalen Aspekten der rechnerischen Geometrie gelegt. Sobald in der Sekundarstufe I Schülerinnen und Schüler in der Lage sind Winkel zu konstruieren und zu messen, stellt sich die Frage, wie ausgewählte Winkel bei sich schneidenden Geraden bestimmt werden können. So gelangt man zu den Scheitelwinkeln, Nebenwinkeln, Stufenwinkeln und Wechselwinkeln und daraufhin zum Innenwinkelsatz für Dreiecke. Dieser lässt sich letztlich zum Innenwinkelsatz für beliebige n-Ecke ausweiten. Im weiteren Lernverlauf können nach der Behandlung des Strahlensatzes nun auch Seitenlängen von Dreiecken bestimmt werden, indem diese in geeigneter Weise in Strahlensatzfiguren eingebettet werden. Die Satzgruppe des Pythagoras ermöglicht es Schülerinnen und Schülern weitere Streckenlängen in rechtwinkligen Dreiecken zu berechnen und zeigt ihren Nutzen in vielfältigen Anwendungsaufgaben, die meist darauf beruhen, Figuren in rechtwinklige Dreiecke zu zerlegen. Der Rückbezug auf ähnliche Dreiecke muss nun nicht mehr erfolgen. Schließlich lassen sich durch die Einführung der trigonometrischen Beziehungen und der Entdeckung des Sinus- und Kosinussatzes alle unbekannten Größen in beliebigen Dreiecken berechnen. Zusammenfassend lässt sich diese Entwicklung in fünf Stufen darstellen (vgl. Filler 2021):

1. Berechnung von *Flächeninhalten* in Rechtecken, Dreiecken und Parallelogrammen.
2. Berechnung von Winkeln ebener geometrischer Figuren durch *Winkelsätze.*
3. Berechnung von Seitenlängen durch die Anwendung von *Strahlensätzen* und der *Ähnlichkeit* geometrischer Figuren.
4. Weitere Möglichkeiten zur Berechnung von unbekannten Größen durch die *Satzgruppe des Pythagoras.*
5. Berechnung aller unbekannten Größen in beliebigen Dreiecken durch *trigonometrische Beziehungen.*

Diese Darstellung zeigt, wie sich die trigonometrischen Verhältnisse am rechtwinkligen Dreieck aus innermathematischer Perspektive in das Schulcurriculum einfügen und an welche mathematischen Lerninhalte diese anknüpfen.

Die Einführung der Sinusfunktion am Einheitskreis: Verglichen mit der Interpretation des Sinus am rechtwinkligen Dreieck und der Fülle an Anwendungsaufgaben, gibt es nur wenige Aufgaben mit Realitätsbezug aus der Schule,

die an die Darstellung des Sinus am Einheitskreis anknüpfen. Meist handelt es sich um eingekleidete Aufgaben, die den Zweck der mathematischen Modellierung erfüllen. Eine typische Aufgabe besteht in der Modellierung der Bewegung einer Gondel, die an einem Riesenrad aufgehängt ist. Statt eines Riesenrades können alternativ auch andere, sich im Kreis drehende Objekte genutzt werden. Darunter fallen zum Beispiel Schallplatten, Zahnräder oder Kreissägen. Es geht stets um die Lokalisierung eines Punktes auf dem sich drehenden Objekt in Abhängigkeit der Zeit. In diesem Modellierungsprozess steht nicht die Antwort auf die konkrete Frage, wo sich ein Objekt zu einem expliziten Zeitpunkt befindet, im Vordergrund, sondern der Modellierungsprozess selbst. Das bedeutet, dass der herausgearbeitete funktionale Zusammenhang von zentraler Bedeutung ist.

Durch die Interpretation am Einheitskreis können Argumente außerhalb des Intervalls $(0°, 90°)$ mit trigonometrischen Funktionen ausgewertet werden. Die Einführung des Bogenmaßes durch die Umrechnungsformel $\alpha_{rad} = \alpha_{Grad} \cdot \frac{\pi}{180°}$ erlaubt schließlich eine Erweiterung auf die reellen Zahlen:

Mithilfe des Einheitskreises können außerdem Symmetrieeigenschaften der Sinusfunktion hergeleitet werden. In Abbildung 4.1 werden die folgenden drei Gleichungen veranschaulicht:

$$\sin(\alpha) = -\sin\big(180° + \alpha\big),\ \sin(\alpha) = -\sin(-\alpha),\ \sin(\alpha) = \sin\big(180° - \alpha\big)$$

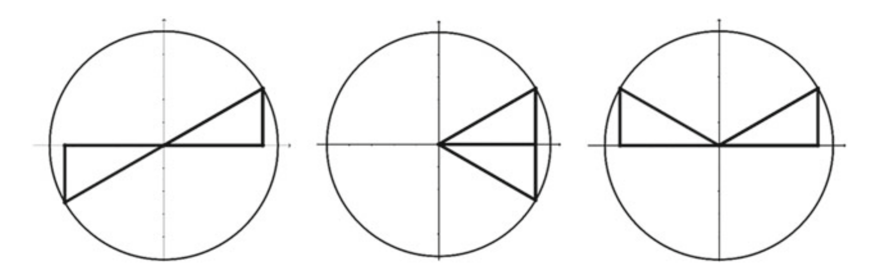


Abbildung 4.1 Symmetrieeigenschaften der Sinusfunktion am Einheitskreis

Des Weiteren können mithilfe des Einheitskreises die Additionstheoreme hergeleitet werden (vgl. Abschnitt 4.2.6). In der Sekundarstufe II kann der Zusammenhang zwischen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion als ihre Ableitung hergestellt werden (vgl. Abschnitt 4.3.3). Vermittels der Definition am Einheitskreis kann schließlich der Graph der Sinusfunktion hergeleitet und unter der Zuhilfenahme dynamischer Geometriesoftware anschaulich dargestellt werden (vgl. Abbildung 4.2).

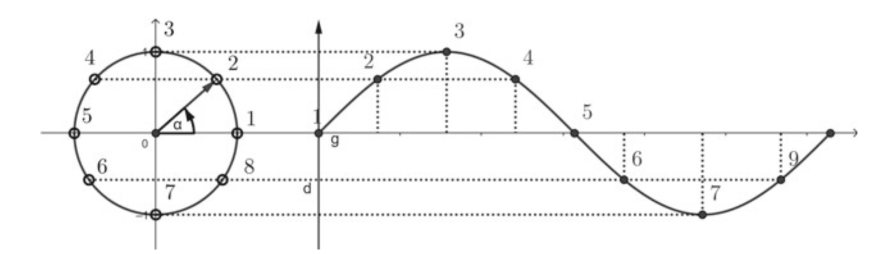


Abbildung 4.2 Herleitung des Graphen der Sinusfunktion vermittels der Definition am Einheitskreis

Ergänzend zum schulischen Weg bei dem der Einheitskreis als analytisches Werkzeug zur Definition und Untersuchung der Sinusfunktion genutzt wird, kann das Spannungsfeld zwischen Konstruierbarkeit und Berechenbarkeit, das bereits in der Dreieckstrigonometrie zur Einführung der trigonometrischen Seitenverhältnisse geführt hat, als Motivation zum Einstieg in die Kreistrigonometrie beitragen. Das Grundproblem lautet dann: *Wie lassen sich unbekannte Größen in einem Kreis berechnen?* Bressoud (2010) sieht in dieser Frage auch historische Relevanz und führt das Beispiel der Sehnenberechnung an, das seiner Meinung nach auch in der Schule als einführendes Beispiel in die Trigonometrie genutzt werden kann. Inwieweit diese historische Einführung tatsächlich der individuellen Begriffsgenese zuträglich ist, ist allerdings eine noch offene Frage. Der übliche Weg führt in der Schule von der Definition des Sinus am rechtwinkligen Dreieck zur Definition am Einheitskreis und nicht umgekehrt.

Modellierung periodischer Prozesse: Durch die Einführung der Sinusfunktion erschließt sich eine Reihe neuer Vorgänge, die sich der Modellierung durch mathematische Funktionen bis dahin entzogen. Dabei handelt es sich um Vorgänge, die sich nach einer bestimmten Zeitspanne periodisch wiederholen, wie die Schwingung eines Federpendels oder der Wechsel von Ebbe und Flut. Durch die Nutzung zur Modellierung periodischer Prozesse gewinnen die trigonometrischen Funktionen im Unterricht erheblich an Bedeutung und weisen zudem eine hohe Anwendungsrelevanz in den Naturwissenschaften auf. Im Zusammenhang mit periodischen Prozessen tauchen allerdings neue Begrifflichkeiten auf, mit denen sich die Lernenden vertraut machen müssen und die den Umgang mit Winkelfunktionen deutlich anspruchsvoller machen. Begriffe wie Amplitude, Periodenlänge, Wellenlänge oder Frequenz müssen in den passenden Anwendungskontext korrekt verwendet und gedeutet werden.

Bezugnehmend auf die zu Beginn des Kapitels gestellten Fragen nach der Rolle der Trigonometrie in aktuellen und in früheren Kernlehrplänen, den in der

Schule verwendeten Sachzusammenhängen und den typischen Lernwegen, lassen sich folgende Antworten formulieren: Die Bedeutung der Trigonometrie in der Schule hat in den letzten 100 Jahren einen inhaltlichen Wandel durchlaufen. Anfang des 20. Jahrhunderts diente die Trigonometrie in der Schule zum großen Teil der Himmelskunde und Navigation auf der Erde. Heutzutage liegen die Anwendungsbereiche in der Physik, im Messen und Berechnen im Gelände und in der Modellierung periodischer Prozesse. Der typische schulische Lernweg der Trigonometrie führt über rechtwinklige Dreiecke zum Einheitskreis und von dort zur Definition der trigonometrischen Funktionen. Auf diesem Weg werden unterschiedliche Darstellungen des Sinus genutzt und miteinander in Verbindung gebracht. Ergänzend werden innermathematische und realitätsbezogene Aufgaben zur Einführung und Verfestigung des trigonometrischen Wissens genutzt.

Nachdem nun ein Überblick über die schulische Behandlung der Trigonometrie damals und in der heutigen Zeit gegeben und die eingangs gestellten Fragen beantwortet wurden, folgt nun eine Darstellung der geschichtlichen Entwicklung der Trigonometrie, aus der weitere Gesichtspunkte zur Herleitung der Grundvorstellungen folgen.

4.2 Historische Genese der Trigonometrie

Die Geschichte der Mathematik kann auf verschiedene Weise in den Mathematikunterricht eingebunden werden (Kronfellner 1998). In Form einer Anekdote, die vom Lehrenden vorgetragen wird, oder als historische Kurzinformationen, die zum Nachdenken und Diskutieren anregen soll. Neuere mathematische Fortschritte der Zeitgeschichte können thematisiert werden, um die Mathematik als eine sich entwickelnde Wissenschaft erfahrbar zu machen. Die Geschichte der Mathematik kann weiter eine Rolle bei der Entwicklung fächerübergreifenden Unterrichts spielen, indem der soziokulturelle Kontext in die Unterrichtsplanung mit einbezogen wird. Nicht zuletzt kann die Einbindung historischer Beispiele in den Mathematikunterricht affektive Ziele verfolgen, indem sie den Unterricht auflockern oder motivierend auf Schülerinnen und Schüler wirken:

> *Die Erkenntnis, dass Mathematik vom Menschen „gemacht“ wurde, dass diese Fehler begangen und uns naheliegend erscheinende Weiterentwicklungen nicht erkannt haben, könnte der vielen Menschen als kühl und unmenschlich erscheinenden Mathematik ein menschlicheres Antlitz verleihen und zum Abbau psychischer Barrieren führen.* (Kronfellner 1997, S. 84)

Die Aufarbeitung der Entstehungsgeschichte der Trigonometrie verfolgt zum einen das Ziel, relevante Sachzusammenhänge zu erkunden, die als Grundlage

für die Formulierung normativer Grundvorstellungen dienen können. Zum anderen lässt sie verstehen, wie und warum es zu den unterschiedlichen Darstellungen der Sinusfunktion gekommen ist. Zum genetischen Lehren der Himmelskunde schreibt Wagenschein (2010) Folgendes:

> *Wir müssen Verstehen lehren. Das heißt nicht: es den Kindern nachweisen, so dass sie es zugeben müssen, ob sie es nun glauben oder nicht. Es heißt: sie einsehen lassen, wie die Menschheit auf den Gedanken kommen konnte (und kann), so etwas nachzuweisen, weil die Natur es ihr anbot (und weiter anbietet).* (Wagenschein 2010, S. 311)

Die Analyse der historischen Genese der Trigonometrie wird unter Berücksichtigung der folgenden Fragen durchgeführt:

- Welcher Zusammenhang besteht zwischen der historischen Genese der Trigonometrie und der derzeitigen Umsetzung mathematischer Inhalte im Schulunterricht?
- Welche Erkenntnissinteressen haben zur historischen Entwicklung der Trigonometrie beigetragen?
- Welche Sachzusammenhänge können als Grundlage für die Formulierung normativer Grundvorstellungen dienen?

Im folgenden Abschnitt wird zunächst eine tabellarische Übersicht über die historische Entwicklung des Sinusbegriffs gegeben. Anschließend werden einzelne Entwicklungsschritte ausgewählt, die eine didaktische Relevanz aufzeigen, und im Detail dargestellt. Diese Hintergründe sind zum Beispiel dazu geeignet, um einen *indirekten genetischen Zugang* (Graumann 1987) zur Thematik herauszuarbeiten.

4.2.1 Tabellarische Übersicht

Die Trigonometrie ist aus mathematikhistorischer Sicht eine der bedeutsamsten Bereiche der Mathematik. Dies hängt damit zusammen, dass auf eine fast 4000-jährige Entwicklungsgeschichte zurückgeblickt werden kann, die auf mehreren Kontinenten spielte und kulturübergreifend stattgefunden hat (Braunmühl 1903; Katz 2004). Die Trigonometrie und mit ihr die Himmelskunde waren treibende Kräfte in der Entwicklung von anspruchsvollen mathematischen Algorithmen, die zu immer besseren Berechnungen der Sinuswerte geführt haben (Espenshade 1967; McCarthy & Byrne 2003; Shirali 2011). Im Folgenden werden einige wichtige Meilensteine der historischen Entwicklung tabellarisch dargestellt, aus denen anschließend ausgewählte Beispiele im Detail vorgestellt werden (Tabelle 4.1):

Tabelle 4.1 historische Entwicklung der Trigonometrie

Zeitpunkt	Ort/Person	Entdeckung
1650 v. Chr.	Ahmes/ Ägypten/ Babylonier	Im Papyrus Rhind wird niedergeschrieben, wie das Seitenverhältnis in rechtwinkligen Dreiecken beim Bau von Pyramiden genutzt wird.
600 v. Chr.	Griechenland/Thales von Milet	Berechnet Entfernungen und Höhen von Gebäuden mit dem Seitenverhältnis in rechtwinkligen Dreiecken.
360 v. Chr.	Griechenland/ Aristarchos von Samos	Berechnet die Entfernung von Sonne zur Erde. Er nutzte dafür Verhältnisse von Kreissehnen und Kreisbögen.
300 v. Chr.	Griechenland/ Euklid	Bestimmt die Längen von regelmäßigen 3-, 4-, 5-, 6- und 10-Ecken. Es ist die Grundlage für die Berechnung von Kreissehnen.
190 v. Chr.	Griechenland/ Hipparch von Nicäa	Berechnet die Abweichung der Erde vom Mittelpunkt der Kreisbahn der Sonne. Nutzt dafür die Längen von Sehnen in einem Kreis. Berechnete Sehnenlängen zu Winkeln im Abstand von 7 ½°.
100 n. Chr.	Alexandria, Ägypten/ Menelaus	Weiterentwicklung der sphärischen Trigonometrie. Menelaus‘ Theorem ist ein Satz über Seitenverhältnisse von Dreiecken in der Ebene wie auch auf einer Kugeloberfläche.
160 n. Chr.	Griechenland/ Ptolemäus	Verfasst den Almagest, eine Abhandlung über die Errungenschaften der Astronomie. Berechnet Sehnentafeln für Werte im Abstand von 1°. Benutzte dafür u. a. die Formel für die Sehne des halben Winkels und einige Additionstheoreme.
500 n. Chr.	Indien/Aryabhata	Rekursive Berechnung der Sinuswerte durch die Differenzenmethode.
600 n. Chr.	Indien/ Bhaskara	Nutzung der Sinusfunktion statt der Sehnenfunktion $\sin(x) = \frac{1}{2} crd(2x)$. Entwicklung einer Approximationsformel für $\sin(x)$, die als Quotient quadratischer Funktionen dargestellt werden kann.
1440 n. Chr.	Deutschland/ Regiomontanus	Kopernikus‘ einziger Schüler veröffentlichte Tabellen mit Werten zu allen sechs trigonometrischen Funktionen und entwickelte so die ebene Trigonometrie als eigenständiges Teilgebiet der Mathematik weiter.
1588 n. Chr.	Deutschland Kassel/ Nicolaus Reimers Ursus	Erste Veröffentlichung der Prosthapaeresis: Ein Verfahren zur Vereinfachung der Multiplikation zweier Zahlen (ähnlich dem Logarithmus) vermittels der Formel für das Produkt zweier Sinuswerte: $\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}\cos(A-B) - \frac{1}{2}\cos(A+B)$
1600 n. Chr.	Deutschland, Kassel/ Jost Bürgi	Entwicklung des „Kunstwegs“: Ein Algorithmus zur beliebig genauen Berechnung von Sinuswerten.
1750 n. Chr.	Deutschland/ Euler	Analytische Behandlung der Sinusfunktionen. Entdeckung der eulerschen Formel $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$
1759 n. Chr.	Deutschland/ Lambert	Entwicklung der hyperbolischen trigonometrischen Funktionen.

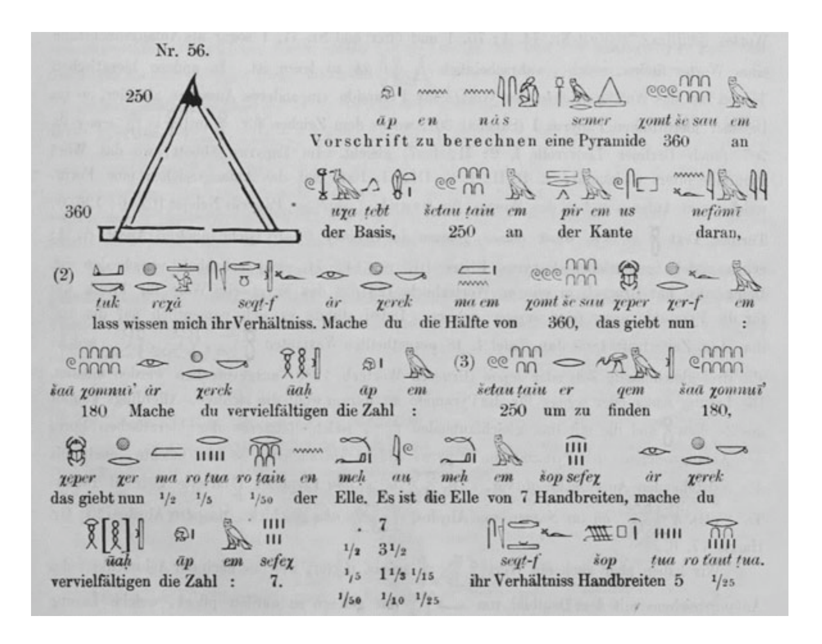
Bei der vorliegenden Tabelle handelt es sich um eine exemplarische Sammlung wichtiger Meilensteine, anhand derer die Fortschritte, typischen Probleme und Fragestellungen der damaligen Zeit erkannt werden können. Zunächst finden sich Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken bei der Vermessung im Gelände und konstruktionsbedingten Problemen bei dem Bau der Pyramiden. Die Entwicklung der Sehnentafeln und damit letztlich die Definition des Sinus als *halbe Sehne* lassen sich auf astronomische Berechnungen zurückzuführen, bei denen unbekannte Größen im Kreis gesucht wurden. Diese astronomischen Berechnungen wurden unter anderem durchgeführt um Sonnenauf- und Sonnenuntergangszeiten zu bestimmen, den Lauf der Planeten vorherzusagen oder die Zeiten von Sonnen- und Mondfinsternissen zu berechnen. Die immer genauere Bestimmung dieser Werte führte zu besseren numerischen Verfahren und Algorithmen, die eng an die geometrische Darstellung am (Einheits-) Kreis anknüpfen. Erst im 15. Jahrhundert entwickelte sich die Trigonometrie zu einem eigenständigen Themengebiet, dass von da an, losgelöst von der Astronomie, eine Eigendynamik entwickelte und auf formaler Ebene neue Erkenntnisse produzierte.

Auf der Grundlage dieser Übersicht werden historische Beispiele ausgewählt, die eine didaktische Relevanz aufweisen. Diese Relevanz ergibt sich unter anderem aus den Grundproblemen und allgemeinen Prinzipien, die durch das Beispiel sichtbar gemacht werden und es somit zu einem Bildungsinhalt im Sinne Klafkis machen (vgl. Abschnitt 3.3). Weiterhin kann eine Relevanz dadurch gegeben sein, dass es entsprechende Schulbuchaufgaben gibt, die sich mit dem historischen Zusammenhängen befassen. Es folgt nun eine detaillierte Darstellung der ausgewählten Beispiele.

4.2.2 Ahmes – Papyrus Rhind (1650 vor Chr.)

Auf einer seiner Reisen nach Ägypten im Jahre 1858 erstand der schottische Anwalt und Antiquar Henry Rhind auf einem Basar im Niltal eine fünf Meter lange und 32 Zentimeter breite Papyrusrolle, die von unschätzbarem historischem Wert war. Der nach ihm benannte Papyrus Rhind wird auf das Jahr 1650 vor Christus zurückdatiert und wurde niedergeschrieben von A'h-mose, der auch unter dem Namen Ahmes bekannt ist. Was diesen Papyrus so besonders macht, ist neben seinem Alter besonders der Inhalt. Es handelt sich um eine der ersten mathematischen Abhandlungen der Menschheitsgeschichte. Der Papyrus Rhind

enthält 84 mathematische Probleme zu verschiedenen mathematischen Teilbereichen. Die meisten Probleme beziehen sich auf konkrete Aufgaben des Alltags, wie beispielsweise die Berechnung der Fläche eines Feldes oder das Volumen eines Getreidespeichers oder darauf, wie man eine Menge Brotlaibe auf mehrere Leute aufteilen kann (Eisenlohr 1877). Die Probleme 56–60 beschäftigen sich mit dem Bau von Pyramiden und sind für die vorliegende Arbeit von besonderem Interesse, da sich dort erste Ansätze trigonometrischer Überlegungen finden lassen. Die Ägypter nutzten bereits ein Seitenverhältnis im rechtwinkligen Dreieck, welches mit dem Wort *seqt* bezeichnet wird (vgl. Tropfke, 1903, S. 190). Eine Definition des *seqt* wird nicht vorgelegt, kann aber durch eine Analyse der bereitgestellten Lösung zum Problem 56 abgeleitet werden. Eine Übersetzung der ca. 3650 Jahre alten Lösung aus dem Papyrus Rhind findet sich bei Eisenlohr (vgl. Abbildung 4.3).


Nr. 56.

250 360

Vorschrift zu berechnen eine Pyramide 360 an der Basis, 250 an der Kante daran,

(2) lass wissen mich ihr Verhältniss. Mache du die Hälfte von 360, das giebt nun : 180 Mache du vervielfältigen die Zahl : (3) 250 um zu finden 180,

das giebt nun 1/2 1/5 1/50 der Elle. Es ist die Elle von 7 Handbreiten, mache du vervielfältigen die Zahl : 7.

. 7
1/2 3 1/2
1/5 1 1/3 1/15
1/50 1/10 1/25

ihr Verhältniss Handbreiten 5 1/25

Abbildung 4.3 Originaltext aus dem Papyrus Rhind. Aufgabe 65 (Eisenlohr 1877, S. 139)

In angepasster Sprache lautet die eingangs gestellte Frage:

Die Kante einer Pyramide ist 250 Ellen lang und eine Seite ihrer Grundfläche ist 360 Ellen lang. Lass mich ihr Verhältnis (seqt) wissen?

Und die Lösung dazu:

Nimm die Hälfte von 360. Multipliziere 250 so, dass du 180 bekommst. Das macht $\frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{50}$ *einer Elle. Eine Elle sind sieben Handflächen. Das ergibt* $5\,\frac{1}{25}$ *Händflächen.*

Eine Elle entspricht in etwa der Länge von der Spitze des Mittelfingers bis zum Ende des Ellenbogens und variiert zwischen 440 und 529 mm. Es gehört zu den historischen ägyptischen Längenmaßen. Eine königliche Elle entspricht dort ca. 526 mm und ist aufgeteilt in sieben Handflächen, die wiederum in vier Finger aufgeteilt sind.

Es ist zunächst nicht ersichtlich, welches Verhältnis in diesem Problem gemeint ist. Der Satz „*Multipliziere 250 so, dass du 180 bekommst*“ verrät allerdings, dass das Produkt des gesuchten Verhältnisses s mit der halben Grundseite der Länge der Kante entspricht:

$$250 \cdot s = 180$$

Anders ausgedrückt: s entspricht dem Verhältnis von halber Grundseite zur Kante der Pyramide; also dem Verhältnis von Ankathete zu Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck bzw. dem Kosinus.

In Problem 57 wird die vorherige Problemstellung umgedreht: Statt den *seqt* einer Pyramide zu bestimmen, ist dieser nun gegeben und wird dazu benutzt, die Höhe einer Pyramide zu finden. Problem 58 benutzt dieselben Werte wie in Problem 57, diesmal ist jedoch der *seqt* gesucht:

Problem 57: Der seqt einer Pyramide ist fünf Handflächen und ein Finger und eine Seite ihrer Grundfläche ist 140 Ellen lang. Wie viele Ellen ist die Pyramide hoch?
Problem 58: Eine Pyramide ist 93 1/3 Ellen hoch und eine Seite ihrer Grundfläche ist 140 Seiten lang. Wie groß ist ihr seqt?

Problem 59 und 60 sind analog zu den beiden vorherigen Problemen mit jeweils anderen Werten.

Es ist interessant festzustellen, dass dieselben Aufgabentypen, die schon vor ca. 3500 Jahren formuliert wurden, auch heutzutage in der Schule verwendet werden. Auch wenn die Terminologien und die Maßeinheiten sich verändert haben, so ist das Prinzip das Gleiche. Schülerinnen und Schüler erhalten die Aufgabe, die Höhe von Bäumen anhand der Schattenlänge und des Blickwinkels zu bestimmen, berechnen die Steigung einer Straße oder erhalten ähnliche Aufgaben im Pyramidenkontext (Dippel et al. 2016). Weitere typische Aufgabenformate, die nach wie vor in der Schule gebräuchlich sind, beziehen sich auf Thales von Milet, der ca. 1000 Jahre nach Ahmes lebte.

4.2.3 Thales von Milet (634–548 vor Christus)

Thales von Milet war ein griechischer Geometer, Naturphilosoph und Astronom. Er lebte in der Zeit von 624–548 vor Christus und hielt sich einige Zeit in Ägypten auf, wo er von den dortigen Priestern die Geometrie erlernte (Braunmühl 1903). Im schulischen Kontext ist er bis heute bekannt für den nach ihm benannten Satz:

> *Ein Dreieck, dessen Eckpunkte alle auf einem Kreis liegen und bei dem eine Dreiecksseite der Länge des Durchmessers des Kreises entspricht, ist rechtwinklig.*

Thales beschäftigte sich nicht nur mit Dreiecken in Kreisen, sondern auch mit Dreiecken, die erzeugt werden, wenn hohe Gebäude ihre Schatten werfen. Es ist überliefert, dass Thales bereits in der Lage war, die Höhe von Pyramiden über ihren Schattenwurf zu berechnen. Braunmühl schreibt dazu, dass Thales „die Höhe der Pyramiden mittels ihres Schattens gemessen habe und zwar, indem er denselben bestimmte, wenn seine Länge mit der Höhe des zu messenden Gegenstandes übereinstimmte“ (Braunmühl 1903, S. 6). Thales Trick bestand also darin, die vertikale Messung durch eine horizontale Messung zu ersetzen, was wesentlich einfacher durchzuführen war. In den *Sieben Weisen von Plutarch* wird Thales auch nachgesagt, dass er die Höhen von Pyramiden bestimmte, indem er den Schatten eines Stockes zur Hilfe nahm. Er verwendete dabei sein Wissend darüber, dass die beiden so entstandenen Dreiecke dieselben Seitenverhältnisse aufweisen (Maor 1998). Auch hier wird die horizontale Messung wieder durch eine vertikale Messung ersetzt, allerdings nutzt Thales darüber hinaus die Ähnlichkeit von Dreiecken um die Höhe der Pyramide zu bestimmen. Eine weitere Erzählung über Thales, die in Verbindung mit der Ähnlichkeit von Dreiecken

steht, befasst sich mit der Berechnung von Distanzen zwischen Schiffen und einem Leuchtturm in Milet. Braunmühl berichtet von der folgenden Geschichte:

> *Wahrscheinlich nahm er diese Messung vor, indem er von einem hohen Standpunkt, etwa einem Turm aus, den Winkel bestimmte, welchen die von dem Beobachtungsorte nach dem Schiffe gezogene Gerade mit der Vertikalen bildet. War nun die Höhe des Turmes schon vorher gemessen, so konnte man mit Hilfe der Ähnlichkeit (aber geometrisch auch nur mit dieser) auf die Entfernung des Schiffes vom Fußpunkte des ersteren schließen.* (Braunmühl 1903, S. 6)

Dieses Beispiel steht exemplarisch für eine Reihe von anwendungsbezogenen Mathematikaufgaben, die sich mit der Vermessung im Gelände beschäftigen, und wird auch heutzutage noch in Schulbüchern thematisiert (Cornetz et al. 2019). Innermathematisch lässt es sich auf die Berechnung von unbekannten Größen in einem rechtwinkligen Dreieck zurückführen. Das Grundprinzip, welches den Lernenden durch dieses Beispiel sichtbar gemacht werden kann, liegt in der Ähnlichkeit von Dreiecken und wird in besonderer Weise erfahrbar durch den Vergleich unterschiedlicher Schattenlängen.

4.2.4 Aristarch von Samos (310–230 vor Chr.)

Aristarch von Samos war mit seinen astronomischen Beobachtungen einer der frühesten historischen Personen, die eine mathematische Aufarbeitung und Begründung seiner Entdeckungen bereitstellte. Er ist berühmt dafür, dass er der erste Mathematiker und Astronom war, der ein heliozentrisches Weltbild präsentierte (van Brummelen, S. 22). Trotzdem basiert die einzig originale, von ihm erhaltene Überlieferung auf dem geozentrischen Weltbild und beinhaltet eine Abhandlung über die Größen und Distanzen von Sonne und Mond. Bei seiner Berechnung der Entfernung zwischen Sonne und Erde, die als *Methode der Monddistanzen* bekannt ist, nutzt Aristarch Argumentationen an rechtwinkligen Dreiecken, die in die Kreisbahn der Sonne um die Erde eingebettet sind (Braunmühl 1903). Aristarch gab die Entfernung zwischen Sonne und Mond in Vielfachen der Entfernung zwischen Mond und Erde an. Dafür untersuchte er die Konstellation von Sonne, Mond und Erde, wenn auf der Erde ein Halbmond zu sehen ist. Seinen Überlegungen nach ergeben zu diesem Zeitpunkt Sonne, Mond und Erde ein rechtwinkliges Dreieck. Den zweiten Winkel dieses Dreiecks wird Aristarch aus seinen Sternenbeobachtungen empirisch erhalten haben. Dafür musste er den Winkel zwischen Mondaufgang und Sonnenaufgang bestimmen (vgl. Abbildung 4.4). Seine Messungen lieferten ihm einen Wert von 87°

und mit diesem Wert kam er zu dem Ergebnis, dass die Entfernung der Sonne zur Erde das circa 18–20 Fache der Entfernung von Erde zu Mond beträgt (Berggren & Sidoli 2007). Ein extrem kleiner Wert, denn das eigentliche Verhältnis liegt bei einem durchschnittlichen Wert von 389. Um zu verstehen, wie es zu diesem enormen Fehler kommen konnte, soll Aristarchs Modell an der vereinfachten Darstellung in Abbildung 4.4 und mit dem heutigen Wissen über die Kosinusfunktion erläutert werden.

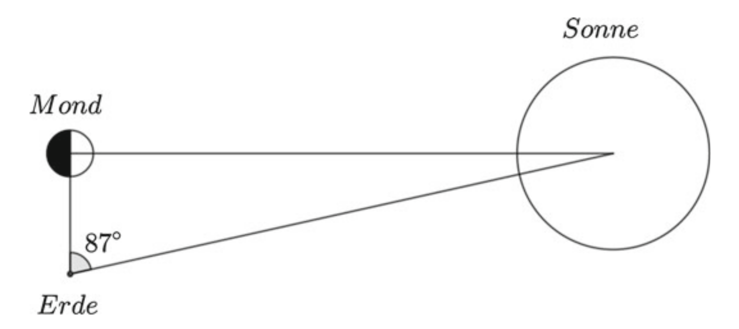


Abbildung 4.4 Methode der Monddistanzen

In dem rechtwinkligen Dreieck erhält man den Kosinus von 87° in dem das Verhältnis der Distanzen zwischen Erde und Mond EM, sowie Erde und Sonne ES gebildet wird. Das bedeutet

$$\cos 87° = \frac{EM}{ES}$$

Stellt man die Gleichung nach ES um, erhält man:

$$ES = \frac{1}{\cos 87°} EM = 19,1 \cdot EM$$

Wird dieser Wert im Sachkontext interpretiert, so bedeutet dies, dass die Entfernung von der Erde zur Sonne 19,1 Mal der Entfernung von der Erde zum Mond entspricht. Wo liegt nun der Fehler in Aristarchs Berechnung? Der gemessene Winkel von 87° weicht 2°50‘ Minuten von der exakte Winkelgröße 89°50‘ ab. Da der Kosinus von 90° gleich 0 ist, wird der Kehrwert des Kosinus in der Nähe um 90° beliebig groß. Da dieser Kehrwert in der Verhältnisgleichung auftaucht,

hat ein kleiner Messfehler von 2°50‘ große Auswirkungen auf das Ergebnis und man erhält einen weitaus größeren Wert von $\frac{1}{\cos 87°50'} = 343,78$. Dieser ist schon wesentlich näher am eigentlichen Verhältnis.

Trotz der fehlerhaften Messung bleiben die Modellierung der Situation und die Idee, die Längen der Seiten in einem Dreieck in Relation zueinander anzugeben, eine außergewöhnliche und raffinierte Leistung. Eine Einbindung dieses historischen Sachzusammenhanges in den mathematischen Unterricht der Sekundarstufe I wurde bereits von Jahnke (1998) vorgeschlagen und wird auch in Mathematikbüchern erwähnt (Dippel et al. 2016). Als Anwendungsbeispiel aus der Astronomie unterscheidet es sich von den Aufgaben zur Vermessung im Gelände und markiert einen wichtigen Entwicklungsschritt in der Genese der Trigonometrie. Aus mathematischer Sicht lehrt dieses Beispiel, welche Auswirkungen kleine Messfehler auf das Ergebnis einer Rechnung haben. Es lassen sich außerdem Aussagen über das Änderungsverhalten der Kosinusfunktion um den Wert 90° ableiten. Es zeigt sich, dass kleine Veränderungen des Argumentes um den Wert 90° eine relativ große Auswirkung auf den Funktionswert habe. Dies hängt wiederum damit zusammen, dass die Ableitung der Kosinusfunktion an der Stelle 90° gleich 1 ist.

4.2.5 Hipparch von Nicäa (um 190 v Chr.)

Hipparch gehört zu den bedeutendsten Astronomen der Antike. Seine astronomischen Beobachtungen und Berechnungen waren wegweisend für eine ganze Generation von Wissenschaftlern und er gilt bei einigen als der Begründer der trigonometrischen Lehre (Tropfke 1903). Trotz seiner Wichtigkeit sind keine Originalwerke von ihm erhalten und sein Beitrag zur Wissenschaft ist nur durch Überlieferungen bekannt. Uneinigkeit herrscht über die Größe und Inhalte seines Lebenswerkes. Einigen Quellen zufolge (Tropfke 1903, S. 186; Maor 1998, S. 24) bestand sein großes Werk aus zwölf Büchern (oder Abschnitten), die sich mit der Berechnung von Sehnen eines Kreises zu einem gegebenen Innenwinkel beschäftigen (vgl. Abbildung 4.5).

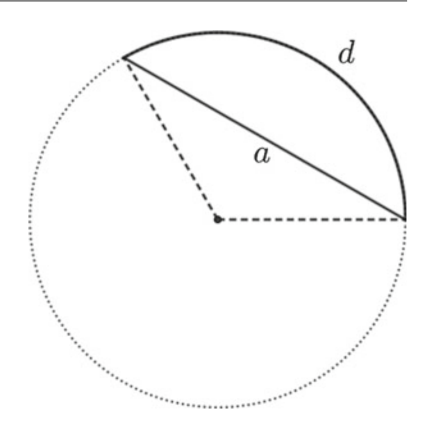


Abbildung 4.5
Berechnung der Kreissehne

In einem Kreis mit dem Radius $r = 1$ *trennt die Sehne* a *ein Kreisbogenstück mit der Länge* $d = \frac{2}{3}\pi$ *ab.*
Berechne die Länge von a.

Auszüge aus dem tatsächlichen Werk wurden allerdings nie gefunden und auch die Größe des Werkes scheint unangemessen für den Inhalt, weswegen es starke Zweifel an dieser Überlieferung gibt (van Brummelen, 2009, S. 42). Es ist unbestritten, dass Hipparch einen großen Einfluss auf das Werk des Ptolemäus ausübte, dessen Schrift *Almagest* bis ins Mittelalter einen hohen Stellenwert hatte. Ein Problem aus dem Almagest wird vielfach als Originalarbeit Hipparchs zitiert und beschäftigt sich mit den ungleichen Längen der Jahreszeiten:

Bereits den Ägyptern war die ungleiche Länge der Jahreszeiten bekannt, die nicht so recht in das Weltbild passte, in dem die Sonne sich gleichmäßig in einer Kreisbahn um die Erde dreht. Die Sonne braucht 94 ½ Tage um von der Frühlings Tag-und-Nacht-Gleiche zur Sommersonnenwende zu gelangen und von dort 92 ½ Tage zur Herbst Tag-und-Nacht-Gleiche. Die restlichen Tage verteilen sich auf den Herbst mit einer Länge von 88 1/8 Tagen und auf den Winter mit einer Länge von 90 1/8 Tagen (van Brummelen 2009). Zwar ist die Arbeit von Hipparch zur Lösung dieses Problems verloren gegangen, die Überlieferung durch Ptolemäus ist aber noch erhalten. Ptolemäus löste das Problem, in dem er die Erde aus dem Zentrum der Umlaufbahn der Sonne hinausbewegte, wodurch die orthogonalen Sehnen, welche die Jahreszeiten voneinander abgrenzen, Kreisbögen unterschiedlicher Länge von der Umlaufbahn der Sonne abtrennen (vgl. Abbildung 4.6). Das Ziel ist nun, sowohl die horizontale als auch die vertikale Entfernung vom Zentrum der Sonnenumlaufbahn zu ermitteln. Dazu rechnete

Ptolemäus im ersten Schritt die Längen der einzelnen Jahreszeiten in Grad um. Wird der Kreis in 360 Teile geteilt, so beansprucht der Frühling bei einer Jahresdauer von 365,25 Tagen genau $(94,5 \div 365,25) \cdot 360° = 93,15°$ und der Sommer $(92,5 \div 365,25) \cdot 360° = 91,17°$. Zusammengenommen ergibt das für den Kreisbogen von Frühlingsanfang bis Herbstanfang eine Länge von 184,32 Grad. Die horizontale Abweichung vom Zentrum der Sonnenumlaufbahn entspricht also der halben Sehnenlänge, die von einem Winkel von 4,32° abgetrennt wird (vgl. Abbildung 4.6).

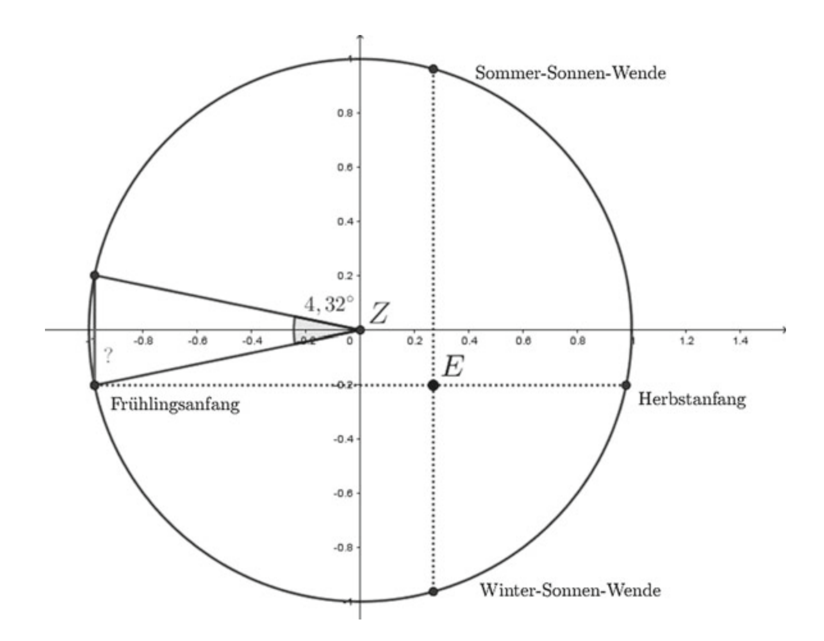


Abbildung 4.6 Abweichung der Erde vom Zentrum der Sonnenumlaufbahn

Da die tatsächliche Größe vom Radius der Umlaufbahn abhängt und dieser damals nicht bekannt war, konnte Hipparch nur einen relativen Anteil, gemessen an der Distanz von der Erde zur Sonne, bestimmen. Heutzutage ist bekannt, dass diese Distanz ca. 149.600.000 km oder 1 Astronomische Einheit (AE) beträgt. Da die Länge der halben Sehne eines Winkels von 4,32° dem Sinus von 2,16° entspricht, erhält man mit der Sinusfunktion eine Länge von $\sin(2,16°) \approx 0,038$

AE, also in etwa $3,8\%$ der Entfernung von der Erde zur Sonne. Dahingegen beträgt die vertikale Abweichung in etwa 0,0043 AE, also weniger als $0,5\%$.

Zwar ist das vorliegende Beispiel nicht mit dem heliozentrischen Weltbild zu vereinbaren und ist aus heutiger Sicht fehlerhaft, dennoch ist es wesentlicher Bestandteil der geschichtlichen Entwicklung und zeigt als solches, wie Mathematik vom Menschen *gemacht* wird (Kronfellner 1998). Es vermittelt dadurch ein realistisches Bild der Entwicklungsgeschichte der Mathematik, die geprägt ist von Versuchen, Abzweigungen und Verwerfungen und nicht so geradlinig verläuft, wie mathematische Fachvorlesungen es mitunter suggerieren. Zudem liefert es eine Problematik, die erst durch die Berechnung von Sehnenlängen gelöst werden kann. Dadurch erhält die Berechnung von Sehnenlängen eine neue Anwendungsdimension. Bressoud (2010) setzt Hipparchs Methode didaktisch um, indem er eine historisch motivierte Einführung der Trigonometrie entwickelt und zeigt damit, dass eine Einführung des Sinus am Einheitskreis aus historischer Sicht möglich und sinnvoll ist.

4.2.6 Ptolemäus (um 160 n. Chr.)

Ptolemäus war ein griechischer Mathematiker und Astronom. Er lebte in der Zeit um 160 n. Chr. in Alexandria in Ägypten, das zu dieser Zeit unter römischer Herrschaft stand. Ptolemäus ist durch seine Schriften zu weitreichendem und langanhaltendem Ruhm gekommen. Sein Hauptwerk *Almagest* war bis ins späte Mittelalter das am weitesten verbreitete Werk über die antike Astronomie. Es beruht auf einem geozentrischen Weltbild, in dem sich die Planeten in Kreisbahnen um die ruhende kugelförmige Erde bewegen. Von großem Nutzen waren die von ihm niedergeschriebenen Sehnentafeln. Diese Sehnentafeln liefern die Länge einer Sehne s, die von einem Winkel der Größe α in einem Kreis abgetrennt wird. Der Kreis hatte bei Ptolemäus einen Durchmesser von 120 Einheiten. Die Funktion, die zu einem Winkel α die Länge einer Sehne s ausgibt, wird meist mit $crd(\alpha)$ bezeichnet [engl.: crd = chord, zu dt.: Sehne]. Diese Sehnenfunktion steht in dem folgenden Zusammenhang zu der heutzutage geläufigeren Sinusfunktion:

$$crd(\alpha) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2 \cdot 360^\circ} \cdot 2\pi\right)$$

Es wird überliefert, dass Ptolemäus diese Sehnentafeln unter anderem dazu nutzte, um den Durchmesser des Breitengrades von Rhodos (36°) zu bestimmen (vgl. Abbildung 4.7, van Brummelen 2009).

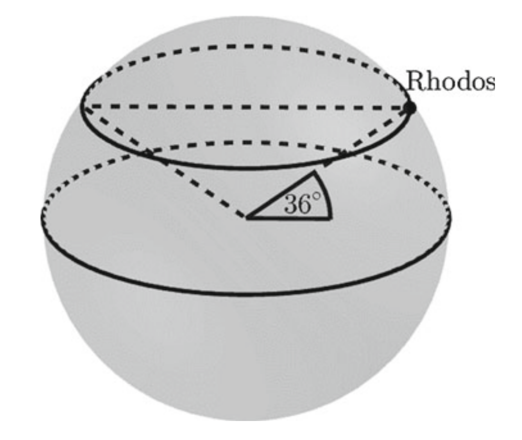


Abbildung 4.7
Berechnung des Breitengrades nach Ptolemäus

Die Sehnentafel von Ptolemäus geht in 30 Sekunden-Schritten voran, was $\frac{1}{2}$ ° entspricht. Die Einteilung des Kreises in 360° geht wiederum auf die Babylonier ca. 800 vor Christus zurück. Eine Vermutung lautet, dass diese Zahl gewählt wurde, weil sie sehr nah an den 365 Jahrestagen liegt. Bei den Beobachtungen der Planetenbewegungen konnten die Babylonier dann in etwa sagen, dass sich die Sonne am Fixsternhimmel entlang der Ekliptik circa 1° pro Tag weiterbewegt. Eine andere Erklärung führt diese Einteilung darauf zurück, dass ein Kreis auf natürliche Weise in sechs Abschnitte eingeteilt werden kann, wobei jeder dieser Abschnitte von einer Sehne abgetrennt wird, die dem Radius des Kreises entsprechen (Maor 1998). Sicher ist, dass die Babylonier im Sexagesimalsystem rechneten: Ein Zahlensystem zu der Basis 60. Die Griechen übernahmen schließlich diese Einteilung und führten das Gradmaß ein. Ein Grad entspricht im Sexagesimalsystem 60 Minuten und eine Minute 60 Sekunden. Die Worte Minute und Sekunde entstammen dem Lateinischen *pars minuta prima,* dies bedeutet erster kleiner Teil und *pars minuta secunda,* dies bedeutet zweiter kleiner Teil (Bressoud 2010). In Fachbüchern steht beispielsweise für 3 Grad, 14 Minuten und 15 Sekunden die Notation 3°14‘15“ oder auch einfach 3;14,15. Dabei ist es nicht unüblich, auch Längen und andere Größen im Sexagesimalsystem auszudrücken. Ptolemäus nutzte beispielsweise den Wert 3;8,30 als Näherung von π. Im Dezimalsystem entspricht das $3 + 8/60 + 30/3600 = 3{,}141666\ldots$ Darüber hinaus lässt sich die bereits erwähnte Einteilung des Durchmessers eines Kreises in 120 Teile auf das Sexagesimalsystem zurückführen. In diesem System hat die Einteilung den Vorteil, dass Brüche größtenteils vermieden werden. Der Radius wird in 60 Teile geteilt, die jeweils wiederum in 60 kleinere Teile geteilt werden

und so fort. Bei den Berechnungen von Sehnenlänge zu einem Kreisbogenstück gab Ptolemäus die Länge also immer in Relation zu einem Radius von 60 Teilen an.

4.2.7 Berechnung der Sehnentafeln

Die Berechnungen der Sehnentafeln von Ptolemäus stellen aus historischer Perspektive einen Meilenstein der geschichtlichen Entwicklung der Trigonometrie dar. Ptolemäus schaffte es, die Sehne für einen Winkel von 1° zu bestimmen und nutzte dafür in systematischer Weise die mathematischen Erkenntnisse seiner historischen Vorgänger. Anschließend berechnete er alle weiteren Werte im Abstand von 1°. Neben den Ergebnissen seiner Berechnungen, die großen Nutzen in der Astronomie aufwiesen, war demnach seine Vorgehensweise von besonderer Bedeutung. Zusammenfassend lässt sich seine mathematische Arbeit auf drei Grundsätze zurückführen:

1. Berechnung der Seitenlängen vom regelmäßigen 3-, 4-, 5-, 6- und 10-Eck,
2. der Ptolemäische Satz,
3. der Halbsehnensatz.

Auf der Grundlage dieser mathematischen Sätze entwickelte Katz (2011) eine historisch orientierte Unterrichtsreihe die als Einführung in die Trigonometrie dienen kann. Dabei orientierte Katz sich an der Arbeit von Kopernikus (1995), dessen Methoden denen von Ptolemäus stark ähneln. Ein solcher Unterrichtsentwurf, der die Arbeiten von Ptolemäus einbezieht, hat für den Lernenden aus didaktischer Sicht mehrere Vorteile. Durch eine Behandlung der historischen Rechenverfahren im Unterricht wird den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit gegeben, nachzuvollziehen, wie Werte der Sinusfunktion konkret ausgerechnet werden können. Da es sich bei Ptolemäus Vorgehen um ein mehrstufiges Verfahren handelt, dass in seiner Komplexität von Schritt zu Schritt steigt, können seine Arbeiten außerdem zur Entwicklung differenzierender Unterrichtseinheiten verwendet werden. Der erste Schritt – das Berechnen von Sehnenlängen in regelmäßigen 3-, 4- und 6-Ecke – wird beispielsweise nach wie vor im Unterricht behandelt, um die Werte der Sinusfunktion für $\alpha = 60°, 45°$ und $30°$ geometrisch zu bestimmen. Aus diesen Gründen werden im Folgenden die mathematischen Grundlagen eines historisch orientierten Unterrichtskonzepts ausführlich dargestellt. Ergänzend zum Artikel von Katz (2011) werden einige mathematische Berechnungen

und Beweise in diesem Abschnitt im Detail durchgeführt, die im Original in der Art nicht vorkommen.

Zunächst werden die Seitenlängen der regelmäßigen 3-, 4-, 5-, 6- und 10-Ecke im Einheitskreis bestimmt, die bereits in den Büchern von Euklid untersucht wurden. Dort berechnete Euklid die Seitenlängen der regelmäßigen n-Ecke, die jeweils den Sehnen zu den Winkeln 130°, 90°, 72°, 60° und 36° entsprechen. Die Seitenlängen können mithilfe elementargeometrischer und algebraischer Überlegungen im Einzelnen hergeleitet werden. Dabei bildet das 6-Eck den einfachsten Fall: Dort sind die Seiten gleich dem Radius des Kreises. In einem Kreis mit dem Radius $r = 1$ gilt also für die Seitenlänge des 6-Ecks $s_6 = 1$. Das regelmäßige 4-Eck wird durch die Diagonalen in vier gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke zerlegt, deren Katheten die Länge 1 haben. Für die Seitenlänge gilt nach dem Satz des Pythagoras $s_4 = \sqrt{2}$. Die Seiten des regelmäßigen 3-Ecks können aus der Seitenlänge des regelmäßigen Sechsecks und dem Satz des Pythagoras hergeleitet werden, es gilt $s_3 = \sqrt{3}$. Bei dem regelmäßigen 5- und 10-Eck stellt sich die Situation etwas komplizierter dar. Euklid löst das Problem in den Elementen in Kapitel XIII zu platonischen Körpern mithilfe zweier Gleichungen (Geyer 2001). Er zeigt zunächst in Gleichung Nr. 9, dass für die Seiten s_6 und s_{10} die folgende Gleichung gilt:

$$\frac{s_6 + s_{10}}{s_6} = \frac{s_6}{s_{10}}$$

Damit erhält man den Wert $s_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Anschließend folgert er aus Gleichung Nr. 10 den Wert für $s_5 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Die Gleichung lautet:

$$s_5^2 = s_6^2 + s_{10}^2$$

Im Folgenden wird nun ein alternativer Weg vorgestellt, der ohne die beiden Gleichungen auskommt und in keiner der in dieser Arbeit verwendeten Quellen zu finden ist.

Das regelmäßige 5-Eck: Die Seiten eines regelmäßigen 5-Ecks in einem Kreis mit dem Radius $r = 1$ haben die Länge $s_5 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

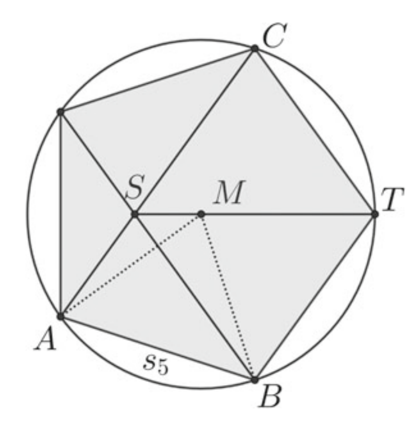


Abbildung 4.8
Regelmäßiges 5-Eck mit Hilfslinien

In Abbildung 4.8 sind die Dreiecke ΔAMB und ΔCST sind ähnlich zueinander, daher gilt für die Länge $\left|\overline{ST}\right|$:

$$\frac{1}{s_5} = \frac{s_5}{\left|\overline{ST}\right|} \text{ und damit } \left|\overline{ST}\right| = s_5^2$$

Mithilfe des Satzes von Pythagoras kann nun die Länge der Diagonale $d_5 = \left|\overline{BC}\right|$ in Abhängigkeit der Seitenlänge s_5 angegeben werden. Es gilt:

$$\left(\frac{1}{2}\left|\overline{BC}\right|\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\left|\overline{ST}\right|\right)^2 = s_5^2$$

$$\left|\overline{BC}\right|^2 = 4 \cdot \left(s_5^2 - \frac{1}{4}s_5^4\right)$$

$$d_5 = \left|\overline{BC}\right| = s_5 \cdot \sqrt{4 - s_5^2}$$

Eine andere Möglichkeit d_5 in Abhängigkeit von s_5 anzugeben, nutzt die Seitenverhältnisse im *goldenen* Dreieck ΔABC (vgl. Abbildung 4.9):

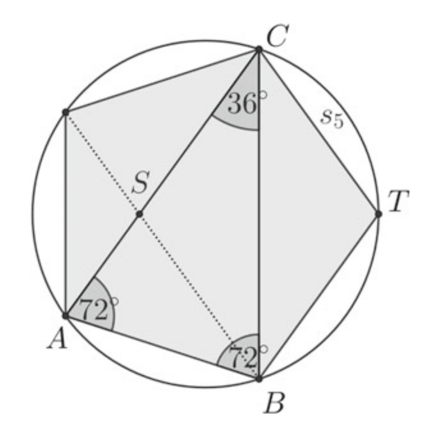


Abbildung 4.9
Regelmäßiges 5-Eck mit goldenem Dreieck

Die Dreiecke ΔABC und ΔASB sind ähnlich zueinander. Daher gilt:

$$\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AS}$$

$$\frac{d_5}{s_5} = \frac{s_5}{d_5 - s_5}$$

$$(d_5)^2 - d_5 s_5 = (s_5)^2$$

$$(d_5)^2 - d_5 s_5 + \left(\frac{1}{2} s_5\right)^2 = (s_5)^2 + \left(\frac{1}{2} s_5\right)^2$$

$$\left(d_5 - \frac{1}{2} s_5\right)^2 = (s_5)^2 + \left(\frac{1}{2} s_5\right)^2$$

$$d_5 = s_5 \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} s_5 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot s_5$$

Werden beide Gleichungen für d_5 gleichgesetzt, erhält man:

$$s_5 \cdot \sqrt{4 - s_5^2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot s_5$$

$$-s_5^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4$$

$$s_5 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

Mit dem Wissen über die Sehnenlängen zu den Winkeln 130°, 90°, 72°, 60° und 36° ermöglicht es nun der Ptolemäische Satz, die Sehnen von Summen und Differenzen zweier Winkel zu berechnen. Dadurch gelangt man zu Sehnenlängen von weiteren Winkeln, die vorher nicht zu berechnen waren. So zum Beispiel zur Sehnenlänge eines Winkels von $12° = 72° - 60°$.

Der Ptolemäische Satz: *In einem Sehnenviereck ist das Produkt der Längen der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der Längen der gegenüberliegenden Seiten.*

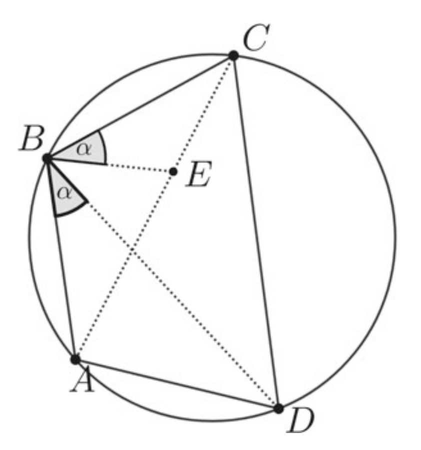


Abbildung 4.10 $AD \cdot BC + AB \cdot CD = BD \cdot AC$

Beweis: Zum Beweis wird der Winkel $\alpha = \measuredangle ABD$ an dem Schenkel BC abgetragen (vgl. Abbildung 4.10) Auf diese Weise erhält man einen neuen Punkt E auf der Diagonale AC. Da die Winkel $\measuredangle BDA$ und $\measuredangle BCA$ nach dem Peripheriewinkelsatz gleich sind, sind die Dreiecke ΔDAB und ΔBEC ähnlich zueinander. Daher gilt:

$$BD : AD = BC : EC$$

$$BD \cdot EC = BC \cdot AD$$

Weiter sind auch die Dreiecke ΔABE und ΔBDC ähnlich zueinander und es gilt:

$$AB : AE = BD : CD$$

$$BD \cdot AE = AB \cdot CD$$

Werden beide Gleichungen zusammenaddiert, erhält man die Behauptung:

$$BD \cdot (EC + AE) = AD \cdot BC + AB \cdot DC$$

$$BD \cdot AC = AD \cdot BC + AB \cdot DC$$

Hat man zwei Sehnen AB und AD zu den jeweiligen Winkeln α und β gegeben, kann die Sehne zu dem Winkel $\alpha + \beta$ ausgerechnet werden. Diese entspricht der Diagonalen BD. Dazu wird der Punkt C so gewählt, dass die Strecke AC gleich dem Durchmesser des Kreises ist. Nach dem Satz des Thales sind die Dreiecke ΔABC und ΔADC rechtwinklig und es ist möglich, mit dem Satz des Pythagoras die anderen Sehnen BC und DC auszurechnen. Damit sind bis auf BD alle Werte in der ptolemäischen Gleichung bekannt und durch Umstellen kann die Länge der Diagonale BD ausgerechnet werden.

Um die Sehne zur Differenz zweier Winkel zu berechnen, werden die bereits bekannten Sehnen an die Stelle AD und BD gelegt. Anschließend wird C derart gewählt, dass DC gleich dem Durchmesser des Kreises ist. Daraufhin werden wieder alle Seiten bis auf AB mit dem Satz des Pythagoras berechnet. Die Seite AB erhält man schließlich durch den Satz des Ptolemäus. Da sechs der größte gemeinsame Teiler von 120, 90, 72, 60, 36 ist, ist 6° auch die kleinste Winkelgröße, die mithilfe der Summe und der Differenzen der bekannten Sehnenlängen ermittelt werden kann. Um zu weiteren Winkelgrößen zu kommen, kann der Halbsehnensatz genutzt werden.

Halbsehnensatz*: In einem Kreis mit dem Radius $r = 1$ ist die Länge a einer Sehne AB zu einem Mittelpunktswinkel α bekannt* (vgl. Abbildung 4.11). *Man erhält die Länge b einer Sehne BC zum halben Mittelpunktswinkel durch die Formel*:

$$b = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$$

$$\left(b = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}\right)$$

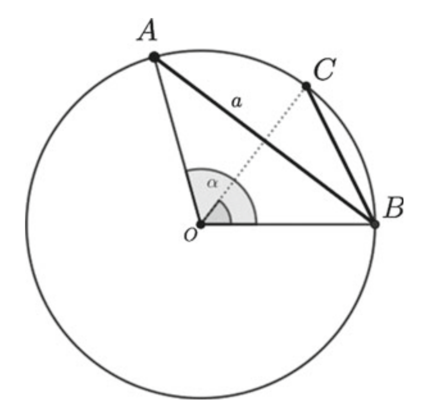


Abbildung 4.11 der Halbsehnensatz

Beweis: Angenommen $\overline{AB} = a$ ist bekannt. Durch die Teilung des Winkels $\measuredangle BOA$, kann die Sehne BC zu einem Kreisbogenstück der halben Länge konstruiert werden (vgl. Abbildung 4.12). Es wird gezeigt, wie die Länge dieser Sehne berechnet werden kann.

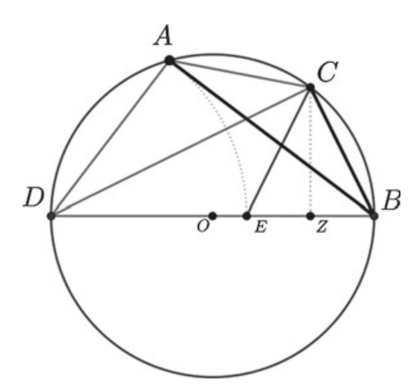


Abbildung 4.12 Beweis des Halbsehnensatz

Das Dreieck ABD ist rechtwinklig. Der Satz des Pythagoras liefert die Länge

$$\overline{AD} = \sqrt{4r^2 - a^2}$$

Wird nun die Länge a‘ auf den Durchmesser DB abgetragen, erhält man den Punkt E. Die Strecke $\overline{DC}$ halbiert den Winkel in D, weshalb die beiden Dreiecke ΔDAC und ΔDEC ähnlich zueinander sind. Damit gilt Gleichheit für die drei Seiten $AC = EC = BC$.

Das Dreieck ΔEBC ist damit gleichschenklig und $EZ = ZB$. Daraus folgt für

$$ZB = \frac{1}{2}(DB - DE) = \frac{1}{2}\left(2r - \sqrt{4r^2 - a^2}\right)$$

Wird der Kathetensatz auf das Dreieck ΔDBC angewandt und der Radius des Kreises auf $r = 1$ gesetzt, erhält man für

$$BC = \sqrt{ZB \cdot DB =}\sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$$

Weiterführende Bemerkung: Aus dem vorangegangen Satz kann in der heutigen Notation die folgenden Gleichheit gefolgert werden: $\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)}$.

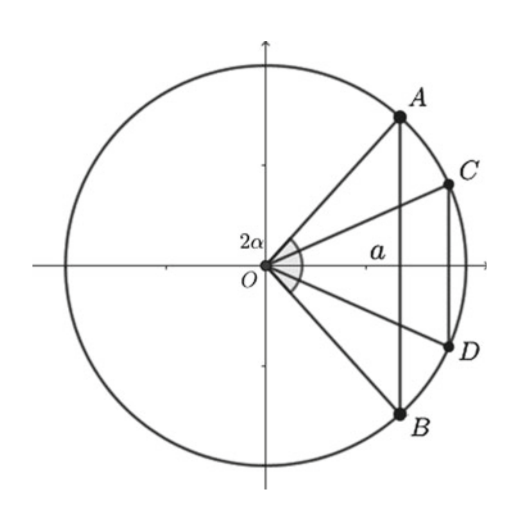


Abbildung 4.13
Begründung der Formel
$\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)}$

Wird der Einheitskreis in ein Koordinatensystem eingebettet (Abbildung 4.13), so besitzt die Sehne mit AB der Länge a einen Zentriwinkel der Größe 2α. Man vergewissere sich darüber hinaus, dass $a = 2 \cdot \sin\alpha$ ist. Es gilt nun:

$$\begin{aligned}\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}CD &= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{4}\left(2-2\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}\right)}\\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}\end{aligned}$$

Der Halbsehnensatz kann nicht nur dazu genutzt werden, weitere Sehnenlängen zu berechnen, sondern hat auch noch eine innermathematische Bedeutung. So wird im Abschnitt 4.3 gezeigt, wie die Gleichung für die halbe Sehne genutzt werden kann, um die Sinusfunktion fachlich zu charakterisieren. Es handelt sich bei der Formel also um eine charakteristische mathematische Eigenschaft der Sinusfunktion.

Die Sehne zu 1°: Mit den Werkzeugen, die bisher dargelegt wurden, ist es möglich, Sehnen für Winkel der Größe 3°, $1\frac{1}{2}$ ° und $\frac{3}{4}$ ° zu bestimmen. Es ist aber nicht möglich, die Sehnenlänge für ganzzahlige Winkelgrößen zu berechnen, die kein Vielfaches von 3° sind. Dafür ist es notwendig, die Sehne für den Winkel von 1° zu approximieren. Van Brummelen (2009) zufolge nutzte Ptolemäus dazu die folgenden Ungleichung. Für Winkel $\alpha < \beta < 90°$ gilt:

$$\frac{Crd(\alpha)}{Crd(\beta)} < \frac{\alpha}{\beta}$$

Dass diese Ungleichung korrekt ist, kann folgendermaßen begründet werden: Wächst α so wächst auch $crd(\alpha)$, allerdings nimmt das Wachstum der Chordfunktion mit größer werdendem α ab. Das ist äquivalent zu der Aussage, dass die Ableitung der Sinusfunktion im Intervall $[0°, 90°]$ monoton fällt. Wird nun zunächst $\alpha = 1°$, $\beta = \frac{3}{4}^{\circ}$ und anschließend $\alpha = \frac{3}{2}°$, $\beta = 1°$ ausgewählt, erhält man die folgende Ungleichungskette:

$$\frac{2}{3}Crd\left(\frac{3}{2}\circ\right) < Crd(1) < \frac{4}{3}Crd\left(\frac{3}{4}\circ\right)$$

Für einen Kreis mit Durchmesser von – 120so wie Ptolemäus ihn wählte – beträgt die obere und untere Schranke in etwa 1,402 Einheiten und damit $crd(1) =$

1, 402. Gewappnet mit diesen Werkzeugen war Ptolemäus schließlich in der Lage, seine Sehnentafeln fertig zu stellen.

Das vorgestellte Beispiel ist aus mathematischer Sicht bedeutend, da erstmals geometrische Verfahrensweisen angewendet werden, um konkrete Werte für die Sehnenlängen und damit für die Sinusfunktion zu berechnen. In der Schule können Teile dieser Methode genutzt werden, um den Schülerinnen und Schülern zu verdeutlichen, welche Schwierigkeiten das Berechnen dieser Werte mit sich bringt und welches geometrische Geschick für die Lösung von Nöten ist. Diese Erkenntnis ist außerdem von besonderem didaktischem Interesse, da die Berechnung der Sinuswerte in der Schule, bis auf wenige Ausnahmen, üblicherweise nur mit dem Taschenrechner stattfindet. Die Werte der Sinusfunktion können für die Lernenden durch eine geeignete didaktische Umsetzung des Verfahrens im Mathematikunterricht an Bedeutung gewinnen.

4.2.8 Aryabhata (um 500 n. Chr.)

Nach Ptolemäus Almagest blieb es zunächst still um die griechische Astronomie. Es gibt wenige Überlieferungen die von herausragenden Werken oder neuen Erkenntnissen berichten (van Brummelen 2009). Die Werkzeuge des Ptolemäus waren lange Zeit ausreichend, um die damaligen Probleme zu lösen. Die ersten Fortschritte ließen sich Jahrhunderte später bei den Indern erkennen. Indien gehört somit zu den ersten wirklichen Nachfolgern, die das Erbe der Griechen antraten und ihre Werkzeuge, Berechnungen und Ideen weiterentwickelten. Aryabhata war einer der ersten indischen Astronomen, der die Arbeit der Griechen fortführte. Seine Erkenntnissinteressen waren dieselben wie die der Griechen. Er bestimmte Sonnen- und Mondfinsternisse, berechnete Planetenbahnen und Auf- und Untergangszeiten der Sonne. Ungeachtet dessen war seine Arbeit eine grundlegend andere, da er aus einer anderen Warte an die Dinge heranging. Einer der augenfälligsten Unterschiede liegt darin, dass Aryabhata keine Sehnenlängen berechnete, sondern sich auf die *jya-ardha* (halbe Sehne) beschränkte. Diesem Wort entstammt auch unsere heutige Bezeichnung *Sinus*. Als arabische Astronomen die indische Trigonometrie weiterentwickelten, wurde das Wort *jya* fälscherweise durch das Wort *Jayb* ersetzt, was so viel bedeutet wie Bucht oder Falte. Zu der Zeit, in der arabische Texte ins Lateinische übersetzt wurden, wurde als Übersetzung das bedeutungsgleiche Wort Sinus gewählt (Bressoud 2010). Zudem arbeitete Aryabhata mit einem Kreis der einen Radius von 3438 Einheiten hat. Diese Normierung rührt daher, dass er zunächst den Umfang des Kreises in 360° eingeteilt hat, die jeweils aus 60‘ bestehen.

Es sind also 21600‘ in einem Kreis. Legt man diese Einteilung des Kreises zugrunde und wählt eine Bogenminute als Einheit, so erhält man einen Radius $r = \frac{21600}{2\pi} \approx 3438$.

Aryabhata berechnete sukzessiv die Länge halber Sehnen im Abstand von $3\frac{3}{4}^\circ = 225'$. Da die halben Sehnen für kleine Werte in etwa der Länge des Kreisbogens entsprechen gilt für den Winkel $\alpha_1 = 225'$:

$$R \cdot \sin(\alpha_1) = R \cdot \sin\left(225'\right) \approx 225$$

Für $\alpha_0 = 0$ gilt weiterhin $R \cdot \sin(\alpha_0) = 0$. Ausgehend von diesen Startwerten lassen sich nun alle weiteren Werte in äquidistanten Abständen bestimmen. Gilt für die Winkel $\alpha_i = i \cdot 3\frac{3}{4}^\circ$, so lässt sich seine Methode für diese Schrittweite in einem Satz zusammenfassen:

> *Die Differenz zwischen einem Sinuswert und dem Nächsten ist gleich der vorherigen Differenz minus* $\frac{1}{225}$ des vorherigen Sinuswert (van Brummelen 2020). Formal ausgedrückt:
>
> $$\Delta(n + 1) = \Delta(n) - \frac{1}{225} \cdot \sin(\alpha_n)$$
>
> Wobei $\Delta(n + 1) = \sin(\alpha_{n+1}) - \sin(\alpha_n)$

Aryabhatas Formel beschreibt also in gewissem Maße das Änderungsverhalten der Sinusfunktion im Intervall $[0, 90°]$ und kann historisch als Vorstufe zur Differentialrechnung verstanden werden. Bei einer äquidistanten Einteilung des Intervalls $[0, 90°]$ kann aus der Gleichung der Differenzen gefolgert werden, dass die absolute Änderung von einem Schritt zum Nächsten mit größer werdendem Winkel abnimmt. Das hängt damit zusammen, dass sich die neue Änderung aus der alten ergibt, indem ein Teil des vorherigen Sinuswertes von ihr abgezogen wird. Dieser Teil ergibt sich aus der Multiplikation mit einem konstanten Faktor, der von der Einteilung des Intervalls abhängt. In Aryabhatas Fall entspricht der Faktor dem Wert $\frac{1}{225}$. Wie genau dieser Faktor von der Einteilung des rechten Winkels abhängt, wird im Folgenden erläutert.

4.2.9 Aryabathas Berechnung der Sehnentafel

In Anlehnung an van Brummelen (2009) wird Aryabhatas Algorithmus am Einheitskreis erklärt, indem der rechte Winkel in 90 Stücke $x_0, x_1, \ldots x_{90}$ von $1°$ geteilt wird (vgl. Abbildung 4.14). Für die n-te Differenz gilt: $\Delta(n) = \sin(x_n) - \sin(x_{n-1})$. Es wird zunächst eine Formel gesucht um diese Differenzen zu bestimmen.

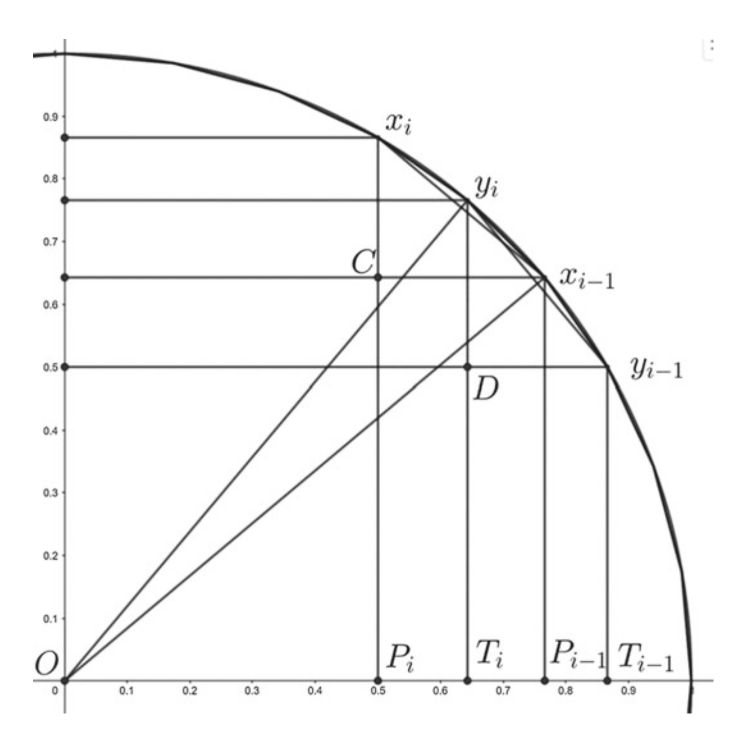


Abbildung 4.14 Berechnung der n-ten Differenzen

Der Übersicht halber wurde der rechte Winkel in Abbildung 4.14 nicht in 90 sondern in neun Teile eingeteilt, wodurch die Abbildung allerdings nicht maßstabsgetreu ist. Die x_i in der Abbildung stehen repräsentativ für die 90 Teile. Die y_i liegen auf dem Kreisbogen in der Mitte zwischen x_i und x_{i+1} d. h. $y_i = \frac{x_{i+1}+x_i}{2}$. Die gesuchten Sinuswerte sind gleich den Längen der Strecken $x_i P_i$. Die beiden Strecken Oy_i und $x_i x_{i-1}$ stehen senkrecht aufeinander, daher sind die rechtwinkligen Dreiecke $\Delta O y_i T_i$ und $\Delta x_i C x_{i-1}$ ähnlich zueinander. Dieser Zusammenhang lässt sich zum Beispiel dadurch erkennen, dass die beiden Geraden auf denen Oy_i und $x_i x_{i-1}$ liegen, eine negativ inverse Steigung

haben. Da die Steigung über das Seitenverhältnis in den jeweiligen Dreiecken angegeben wird, sind diese damit ähnlich. Es gilt:

$$\frac{Cx_i}{x_i x_{i-1}} = \frac{OT_i}{Oy_i}$$

$$\frac{\sin(x_i) - \sin(x_{i-1})}{2 \cdot \sin(0,5°)} = \frac{\cos(y_i)}{1}$$

$$\Delta(i) = [\sin(x_i) - \sin(x_{i-1})] = \cos(y_i) \cdot 2 \cdot \sin\big(0,5°\big)$$

Für die zweiten Differenzen gilt:

$$\Delta(i) - \Delta(i+1) = \big[\cos(y_i) - \cos(y_{i+1})\big] \cdot 2 \cdot \sin\big(0,5°\big)$$

Als nächstes suchen wir eine Formel für die Differenzen der Kosinuswerte. Mit demselben Argument wie oben beschrieen sind die beiden Dreiecke $\Delta Ox_{i-1}P_{i-1}$ und $\Delta Dy_i y_{i-1}$ ähnlich zueinander. Daher gilt für ihre Seitenverhältnisse:

$$\frac{Dy_{i-1}}{y_i y_{i-1}} = \frac{x_i P_i}{Ox_i}$$

$$\frac{\cos(y_{i-1}) - \cos(y_i)}{2 \cdot \sin(0,5°)} = \frac{\sin(x_i)}{1}$$

$$\cos(y_{i-1}) - \cos(y_i) = \sin(x_i) \cdot 2 \cdot \sin\big(0,5°\big)$$

Wird diese Formel in die Gleichung für die zweiten Differenzen der Sinuswerte eingesetzt und umgestellt, erhält man:

$$\frac{\Delta(i) - \Delta(i+1)}{\sin(x_i)} = 4 \cdot \sin\big(0,5°\big)^2$$

Der Term auf der rechten Seite der Gleichung ist konstant, womit der Term auf der linken Seite unabhängig von i ist. Das dieser Quotient konstant ist, hat im Übrigen damit zu tun, dass für die zweite Ableitung der Sinusfunktion $sin''(x) = -\sin(x)$ gilt und die zweiten Differenzen $\Delta(i) - \Delta(i+1)$ aus historischer Perspektive als diskrete Vorstufe zur zweiten Ableitung verstanden werden können.

Wir setzen nun $q{:=}4 \cdot \sin(0,5°)^2$. Hat man bereits zwei aufeinanderfolgende Sinuswerte gegeben, z. B. die Startwerte $\sin(0°) = 0$ und $\sin(1°) = 0,0174$, wird zunächst die Differenz $\Delta(2) = \Delta(1) - q \cdot \sin(1°)$ berechnet. Anschließend erhält man $\sin(2°)$ durch $\sin(2°) = \sin(1°) + \Delta(2)$. Allgemein wird die Berechnung der Sinuswerte in zwei Schritten durchgeführt:

1. Schritt: Berechnung $\Delta(n)$

$$\Delta(n) = \Delta(n-1) - q \cdot \sin(x_n)$$

2. Schritt: Berechnung von $\sin(x_{n+1})$ durch

$$\sin(x_{n+1}) = \sin(x_n) + \Delta(n)$$

Zur didaktischen Umsetzung des Verfahrens im Unterricht bietet sich eine Excel Tabelle an, in der die einzelnen Schritte formalisiert werden. Die Formeln dafür lassen sich in der folgenden Tabelle ablesen (vgl. Tabelle 4.2):

Tabelle 4.2 Exceltabelle zur Berechnung der n-ten Differenzen

	A	**B**	**C**
	Winkel in Grad	**Sinuswerte** $\sin(x_{n-1})$	**Differenz** $\Delta(n-1)$
1	0	0	
2	1	0,01745241	= B2-B1
3	2	= B2 + C3	= C2–4*SIN(1/360*PI())^2*B2
4	3	= B3 + C4	= C3–4*SIN(1/360*PI())^2*B3
5	…	…	…

Weiterführende Bemerkungen: Für eine Einteilung in n Teile kann der Faktor q durch folgende Formel berechnet werden:

$$q = 4 \cdot \sin\left(\frac{90°}{2 \cdot n}\right)^2$$

Aryabhata nutzt in seinem Beispiel für den Faktor $q = 4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot 3,75\right)^2$ eine Näherung von $\frac{1}{225} = 0,00\overline{4}$, der genaue Wert liegt bei ungefähr 0,00428. Die beste Approximation durch einen Stammbruch liegt bei $\frac{1}{234} \approx 0,004273$. Dennoch liefert diese Approximation sehr gute Werte.

Die Herleitung für die Differenzen der Sinus- und Kosinuswerte, mithilfe der identifizierten ähnlichen Dreiecke, lässt sich auch auf beliebige Werte $y < x < 90°$ anwenden. Man erhält dann die Formeln:

$$\sin(y) - \sin(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

Dazu betrachte man Abbildung 4.15:

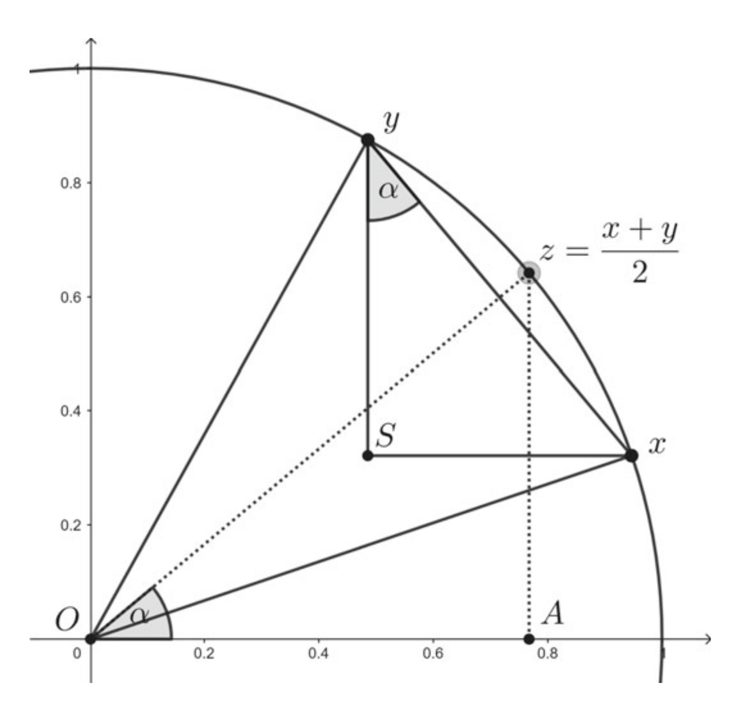


Abbildung 4.15 Skizze zur Differenzenformel

Da die beiden Dreiecke ΔOAz und ΔxyS ähnlich zueinander sind gilt:

$$\frac{Sx}{yx} = \frac{Az}{Oz}$$

$$\frac{\cos(x) - \cos(y)}{\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}{1}$$

$$\cos(x) - \cos(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

In ähnlicher Weise kann man die Differenzenformel für den Sinus herleiten.

Aus genetischer Perspektive können mithilfe dieses Beispiels die historischen Ursprünge trigonometrischer Identitäten – in diesem Fall die Differenzenformel – aufgezeigt werden. Es wird ersichtlich, zu welchen Problemen die Differenzenformel eine Antwort liefern kann und welche geometrischen Überlegungen zu der Formulierung einer solchen Gleichheit beigetragen haben. Bei Aryabhaths Methode handelt es sich aus didaktischer Sicht um einen anspruchsvollen mathematischen Algorithmus, der gegebenenfalls in einem gymnasialen Leistungskurs oder in der Hochschule thematisiert werden kann. Dabei kann entschieden werden, das Verfahren mit digitalen Hilfsmitteln umzusetzen oder den gesamten Herleitungsprozess zu besprechen. Weiterhin kann man diese Differenzenmethode historisch gesehen als Vorstufe der Differentialrechnung ansehen und in diesem Zusammenhang auch die Ableitung der Sinusfunktion thematisieren.

4.2.10 Joost Bürgi (um 1588 n. Chr.)

Fast 1000 Jahre nach den Arbeiten der Inder entwickelte sich die Trigonometrie zu einem selbstständigen Teilgebiet der Mathematik weiter. Regiomontanus, der einzige Schüler von Kopernikus, veröffentlichte um 1440 n. Chr. Sinustafeln zu allen sechs trigonometrischen Funktionen: Sinus, Kosinus, Tangens und den inversen Arcus-Funktionen. Diese Veröffentlichung wird als Beginn der ebenen Trigonometrie angesehen. Circa 100 Jahre später, im Jahre 1552, wurde Joost Bürgi in der Schweiz geboren. Bürgi ist bekannt für seine Arbeit zur Logarithmen-Methode, die er parallel zu Napier entwickelte (Klein 1924). Mit den Logarithmen konnten schwierige Multiplikationen von langen Dezimalzahlen auf wesentlich einfachere Additionen zurückgeführt werden, die mit Hilfe einer

Logarithmentafel zu dem gewünschten Produkt führen. Bürgi war außerdem Uhrmacher am Fürstenhof von Hessen-Kassel und konstruierte dort die erste Uhr mit Sekundenzeiger. Sein Beitrag zur geschichtlichen Entwicklung der Trigonometrie ist unter dem Namen *Kunstweg* bekannt. Bei dem Kunstweg handelt es sich um eine Methode, mit der es möglich war, Sinuswerte für nahezu alle Winkelgrößen beliebig genau zu bestimmen. Der dahinterstehende Algorithmus blieb lange Zeit verschollen. Alles was darüber bekannt war, war in einer rätselhaften Skizze verborgen (Launert 2016, vgl. Abbildung 4.16).

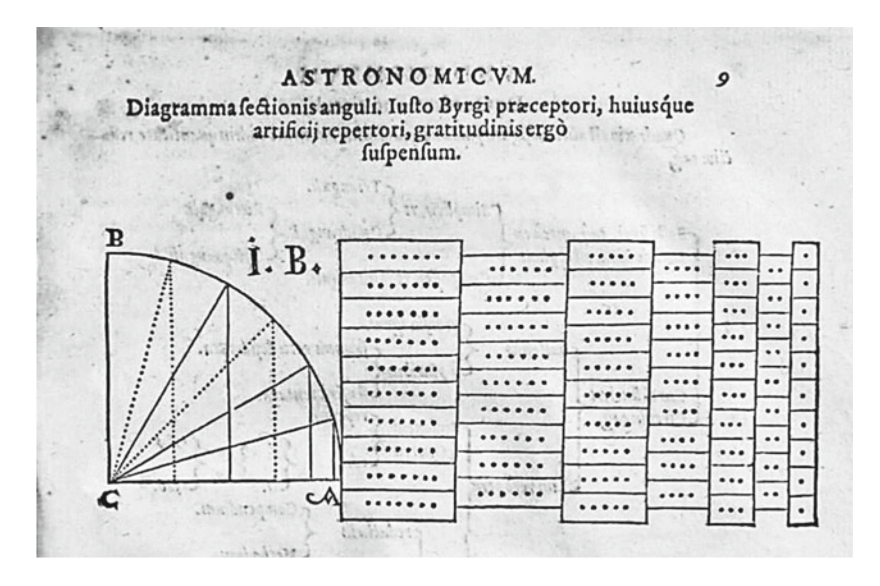


Abbildung 4.16 Bürgis Kunstweg in schematischer Darstellung (Ursus 1588)

Dies änderte sich mit der Wiederentdeckung einer alten Schrift im Jahre 2016 in einer Universität in Breslau, die von Folkerts, Launert und Thom (2016) untersucht wurde. Folkerts et. al. waren in der Lage, Bürgis Algorithmus in einer verständlichen Form wiederzugeben. Es folgt nun eine Darstellung des Kunstweges in fünf Schritten:

1. Im ersten Schritt wird ein Winkel von 90° in n äquidistante Teile aufgeteilt und die entsprechenden Winkelgrößen werden von oben nach unten in eine Spalte geschrieben.
2. Werte für die halbe Sehne dieser n-Teile werden geschätzt und in einer neuen Spalte in einer Tabelle eingetragen, diese Spalte liegt links von der ersten

Spalte (der erste Wert der Spalte ist 0, der letzte Wert gibt den Durchmesser des Kreises an).
3. Der letzte Wert wird halbiert und links unten in einer neuen Spalte eingetragen. Schrittweise werden nun die alten Werte von unten nach oben addiert.
4. In einer neuen Spalte wird mit dem Wert 0 angefangen und dann der oberste Wert der alten Spalte übernommen. Nun werden die Werte schrittweise von oben nach unten addiert.
5. Schritt 3 und 4 können beliebig oft wiederholt werden.

Bürgis Kunstweg soll nun an einem Beispiel verdeutlicht werden: Wird der Kreis in fünf äquidistante Teile geteilt, entstehen die Winkelgrößen 0°, 18°, 36°, 54°, 72° und 90°. Anschließend werden Werte für die Länge der Halbsehnen geschätzt; beispielsweise 0, 1, 2, 3, 4, 5. Es handelt sich also um Schätzungen der Halbsehnen in einem Kreis mit dem Radius 5. Diese Schätzung ist sehr ungenau, wird aber durch den Algorithmus Schritt für Schritt verbessert. Dazu wird der letzte Wert halbiert und anschließend werden sukzessiv die vorigen Werte addiert. Auf diese Weise entstehen die Werte, die von unten nach oben eingetragen werden:

$$c_6 = 2,5 \; c_5 = 6,5 \; c_4 = 9,5 \; c_3 = 11,5 \; c_2 = 12,5$$

Im nächsten Schritt wird eine Null oben in die nächste Spalte eingefügt und der oberste Wert der letzten Spalte übernommen. Es werden wieder sukzessiv die Werte addiert, dieses Mal von oben nach unten. So erhält man die Zahlenfolge:

$$d_2 = 12,5 \; d_3 = 24 \; d_4 = 33,5 \; d_5 = 40 \; d_6 = 42,5$$

Die Werte sind in der folgenden Tabelle dargestellt (vgl. Tabelle 4.3):

Tabelle 4.3 Beispielrechnung für Bürgis Kunstweg

	A	B	C	D	E
1	0°	0		0	
2	18°	1	12,5	12,5	131,25
3	36°	2	11,5	24	118,75
4	54°	3	9,5	33,5	94,75
5	72°	4	6,5	40	61,25
6	90°	5	2,5	42,5	21,25

Auf diese Weise gelangt man von einer zur übernächsten Spalte zu immer besseren Approximationen für die Halbsehnen, die allerdings in jedem Schritt zu einem Kreis mit größerem Radius gehören. In Spalte B ist die erste Schätzung in einem Kreis mit Radius 5, in Spalte D beträgt der Radius bereits 42,5.

Es ist bis heute nicht einschlägig geklärt, wie Bürgi auf diese Methode gekommen ist. Es finden sich aktuelle Arbeiten, welche die Funktionsweise mit modernen mathematischen Werkzeugen erklären und beweisen (Folkerts et al. 2016). Diese Werkzeuge standen Bürgi allerdings nicht zur Verfügung. Einen Erklärungsversuch liefert Roegel (2015). Es ist davon auszugehen, dass Bürgi sich intensiv mit den Tafeln des Regiomontanus auseinandergesetzt hat. Auf der Suche nach einem Muster spielte er mit den Zahlen, las sie vorwärts und rückwärts, bildete Differenzen und Differenzen dieser Differenzen. Dabei kann ihm aufgefallen sein, dass die Verhältnisse zwischen den Ursprungswerten und den zweiten Differenzen stets konstant waren. Der Wert dieser Konstanten hängt von der Einteilung des rechten Winkels ab. Wird der rechte Winkel in 10° Schritten eingeteilt, liegt das Verhältnis bei 32,911. Diese Tatsache hängt damit zusammen, dass die zweite Ableitung der Sinusfunktion der negativen Sinusfunktion entspricht, allerdings war die Differentialrechnung zu Bürgis Zeit noch weitgehend unbekanntes Terrain. Die zweite wichtige Beobachtung liegt darin, dass der letzte Wert der ersten Differenz in etwa der Hälfte des Wertes am Ende der zweiten Differenzen entspricht. Wurden diese beiden Beobachtungen einmal gemacht, könnte es sein, dass Bürgi versucht hat den Prozess umzukehren und statt Differenzen Summen zu bilden. Eine nachvollziehbare Erklärung besagt also, dass Bürgi durch aufmerksame Analyse der ihm gegebenen Sinustafeln in einer Art heuristischem Verfahren zu seinem Ergebnis gelangte.

Zusammenfassung: Verglichen mit den schulischen Lernwegen, bei dem die Trigonometrie mithilfe von Seitenverhältnissen im rechtwinkligen Dreieck eingeführt wird, geht die geschichtliche Entwicklung einen etwas anderen Weg. Zwar finden sich die Seitenverhältnisse rechtwinkliger Dreiecke bei dem Bau der Pyramiden und den Vermessungstechniken des Thales wieder, allerdings war die Berechnung unbekannter Größen im Kreis, insbesondere die der Längen von Sehnen zu einem gegebenen Mittelpunktswinkel, die treibende Kraft in der geschichtlichen Entwicklung der Trigonometrie. Durch die Arbeit der Inder, in der die Sehne im Kreis halbiert wurde, entstand eine Definition, die der heutzutage üblichen Definition am Einheitskreis ähnelt. Erst später, Anfang des 15. Jahrhunderts mit der Arbeit von Rheticus, entkoppelte sich die Trigonometrie langsam von der Darstellung am Einheitskreis (Folkerts et al. 2016). Auch wenn die Abfolge der Inhalte in der Schule nicht der historischen Abfolge entspricht,

bleibt festzuhalten, dass die Darstellungen am rechtwinkligen Dreieck und am Einheitskreis urtypische Darstellungsformen des Sinus sind, durch die mathematische Grundprinzipien, wie die gleichbleibenden Seitenverhältnisse in ähnlichen Dreiecken, oder Grundkenntnisse, wie die Additionstheoreme, erfahrbar gemacht werden können. Die didaktische Umsetzung derartiger historischer Beispiele im schulischen oder universitären Kontext könnte weiterhin dabei helfen, den Lernenden die Mathematik als Schöpfung des menschlichen Geistes näher zu bringen (Winter 1996) und ihnen dadurch ein authentisches Bild der Mathematik zu vermitteln.

Die durch die historische Genese gefunden Sachzusammenhänge und Prinzipien werden in Abschnitt 4.5 mit Anwendungskontexten und mathematischen Definitionen zusammengeführt und entsprechenden Darstellungsformen zugeordnet. Anschließend werden sie in Klassen zusammengefasst, die den Ausgangspunkt für die Formulierung normativer Grundvorstellungen bilden. Im folgenden Abschnitt wird nun die logische Genese der Trigonometrie untersucht.

4.3 Logische Genese der Trigonometrie

Die logische Genese eines mathematischen Begriffs offenbart die innere Struktur des Begriffs und gibt Lernenden die Möglichkeit, diese Strukturen verstehend nachzuvollziehen (Möller 2001). Auf diese Weise lässt sich erkennen, wie ein Begriff in das formale System der Mathematik eingebettet ist und welcher inneren Aufbaulogik dieser folgt. Bei der Analyse der logischen Genese sind die unterschiedlichen Definitionen eines mathematischen Begriffs sowie Grundkenntnisse im Umgang mit dem mathematischen Inhalt und Zusammenhänge zu weiteren Themenbereichen zu berücksichtigen. Diese Aspekte sind Untersuchungsgestand fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Arbeiten. Korntreff (2018) setzt sich beispielsweise auf fachdidaktischer Ebene mit der Einführung des Bogenmaßes, den Additionstheoremen und der Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion auseinander. Weitere Arbeiten beschäftigen sich mit der Herleitung der Ableitung der Sinusfunktion über Differentiale (Katz 1995; Petrache 2014). Sowohl Kirsch (1979) als auch Lowsky (2013) geben unterschiedliche Zugänge zur Behandlung der Sinusfunktion und ihrer Ableitung an, die in ihrer Anschaulichkeit und der mathematischen Strenge variieren. Die Sachanalyse von Podbelsek (1972) liefert eine umfassende und detaillierte Beschreibung darüber, wie die Sinusfunktion in verschiedenen Bereichen der Mathematik fachlich korrekt definiert werden kann. Insgesamt kommt Podbelsek auf elf mögliche Definitionen. Diese reichen von der Definition über das Seitenverhältnis im rechtwinkligen Dreieck, den Einheitskreis, die Euler-Formel, Vektormodelle, Äquivalenzklassen, Riemann Integrale, Potenzreihen, Differentialgleichungen bis hin zur Funktionalgleichung. Podbelsek stellt

darüber hinaus Varianten dieser Modelle vor, in denen er beispielsweise den Einheitskreis durch ein Quadrat ersetzt und dadurch eine *square function* definiert. Diese square function wurde bereits von Biddle (1967) eingeführt und ausführlich analysiert. Salle und Frohn (2020) nutzen diese alternative Sinusfunktion, um Transferprozesse im Unterricht zu aktivieren und dadurch ein tieferes Verständnis von trigonometrischen Funktionen und Periodizität bei Schülerinnen und Schülern auszubilden. Ein tieferes Verständnis wird ihrer Meinung nach durch die Konstruktion von Grundvorstellungen zu Sinus und Kosinus erworben (Frohn & Salle 2017). Grundvorstellungsgeleitete Unterrichtsentwürfe zur Ableitung der Sinusfunktion und zum Übergang vom Sinus am rechtwinkligen Dreieck über den Einheitskreis zur Sinusfunktion sind bei Katter (2017; 2020b) zu finden.

In diesem Abschnitt wird nun, ausgehend von den Definitionen der Sinusfunktion aus der Geometrie und der Analysis, eine Analyse der inneren logischen Struktur des Sinusbegriffes durchgeführt. Grundlage dieser Analyse bilden die folgenden Fragen:

- Welchem Bereich der Mathematik kann die Definition der Sinusfunktion zugeordnet werden?
- Welche Begriffe, Symbole und Formeln werden explizit in der Definition genannt?
- Welche Begriffe, Symbole und Konzepte spielen bei der Definition eine implizite Rolle?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen unterschiedlichen Definitionen des Sinus?

Es folgt eine diagrammatische Übersicht ausgewählter Definitionen des Sinus und ihren Verbindungen (Abbildung 4.17). Die einzelnen Definitionen werden im Anschluss genauer erläutert und schließlich die Zusammenhänge erklärt.

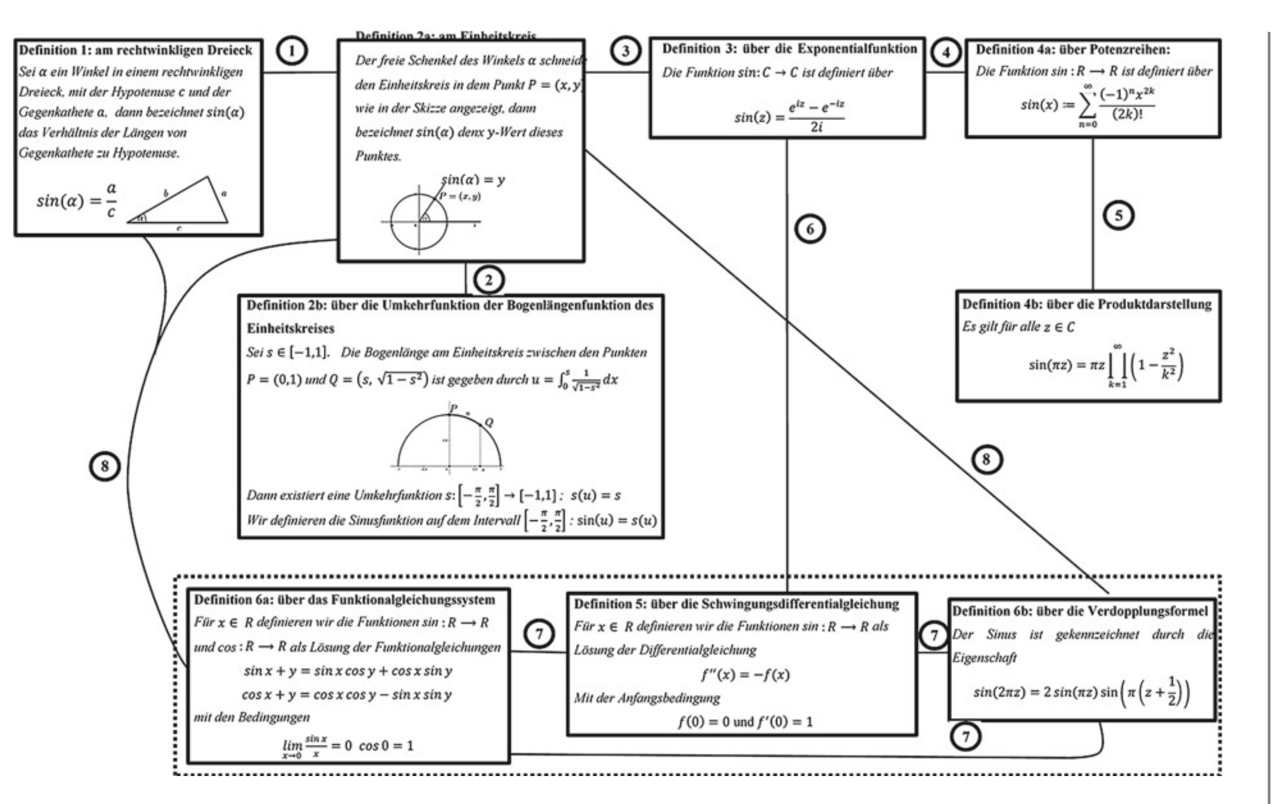


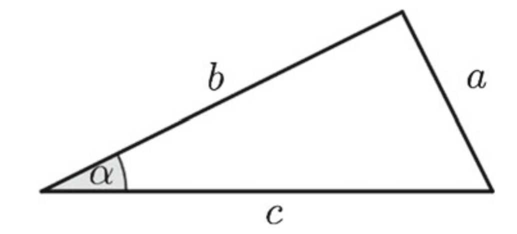
Abbildung 4.17 Schaubild fachliche Charakterisierung

4.3.1 Fachliche Charakterisierungen

Definition am rechtwinkligen Dreieck: Die übliche Art und Weise, die Sinusfunktion in der Schule einzuführen, verläuft über die Definition als Seitenverhältnis in rechtwinkligen Dreiecken. Diese Definition ist Teil eines langen Lernweges, bei dem die fundamentalen Ideen des Messens und Berechnens von Flächeninhalten und Seitenlängen sowie der Konstruktion von geometrischen Objekten im Zentrum stehen (vgl. Abschnitt 4.1). Es handelt sich um eine Definition die in der rechnerischen Geometrie anzusiedeln ist, da sie algebraische und rechnerische Elemente (Gleichungen) und geometrische Objekte (Dreiecke) miteinander in Verbindung setzt (Abbildung 4.18).

> *Sei α ein Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck, mit der Hypotenuse c und der Gegenkathete a, dann bezeichnet $sin(\alpha)$ das Verhältnis der Längen von Gegenkathete zur Hypotenuse*
>
> $$sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

Abbildung 4.18
rechtwinkliges Dreieck



Die Definition des Sinus am rechtwinkligen Dreieck rückt die Berechnung von Größen in geometrischen Figuren in den Mittelpunkt. Die zentralen mathematischen Begriffe, die explizit in dieser Definition auftauchen, sind: *Winkel, Dreieck, Hypotenuse, Gegenkathete, Verhältnis* und *Läng*e. Diese Begriffe müssen den Lernenden wohlbekannt sein, um ein grundlegendes Verständnis für diese Definition zu entwickeln. Für ein tieferes Verständnis der Definition des Sinus am rechtwinkligen Dreieck sind die Konzepte der *Ähnlichkeit* und der *zentrischen Streckung* von Dreiecken hilfreich. Diese Konzepte können selbst wieder Ausgangspunkt einer Sachanalyse sein. Sie bauen auf weiteren Konzepten auf, sind verknüpft

mit anderen Inhalten und lassen sich mit Grundkenntnissen in Verbindung bringen. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf die genannten Konzepte, da diese sich für die Darstellung des Sinus am rechtwinkligen Dreieck als besonders relevant herausstellen. Es besteht eine enge Beziehung zur Definition des Sinus am Einheitskreis, auf die im Folgenden genauer eingegangen wird.

Definition am Einheitskreis: Die Definition des Sinus am Einheitskreis macht es möglich, Werte für Winkel zu bestimmen, die außerhalb des Intervalls $(0°, 90°)$ liegen. Schließlich kann durch die Einführung des Bogenmaßes der Definitionsbereich auf die reellen Zahlen erweitert werden. Der Einheitskreis eignet sich weitergehend im besonderen Maße dazu, dynamische Aspekte wie das Kovariationsverhalten der Sinusfunktion zu diskutieren. Auch hierbei handelt es sich um eine Definition, die in der rechnerischen Geometrie zu verorten ist, da sie sowohl algebraische als auch geometrische Aspekte miteinander vereint.

> *Der freie Schenkel des Winkels α schneide den Einheitskreis in dem Punkt $P = (x, y)$ wie in der Skizze (Abbildung 4.19) angezeigt, dann bezeichnet $sin(\alpha)$ den y-Wert dieses Punktes.*

$$sin(\alpha) = y$$

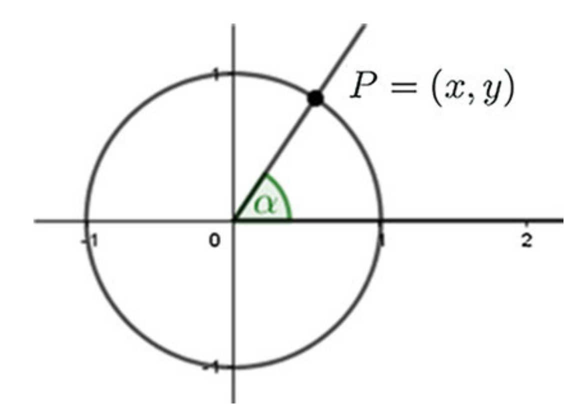


Abbildung 4.19 Sinus am Einheitskreis

Form bzw. Darstellung des Sinus am Einheitskreis können variieren und unterschiedliche Aspekte in den Vordergrund rücken. Beigefügte Bilder zu den

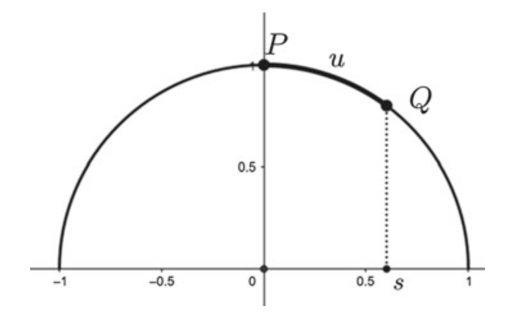
Definitionen können ein in den Einheitskreis eingezeichnetes Referenzdreieck beinhalten oder ohne ein solches auskommen. Der Sinus kann über das Bogenmaß oder das Gradmaß definiert werden und es kann von Koordinaten eines Punktes oder von dem Abstand zur x-Achse gesprochen werden.

Wie bei der Dreiecksdefinition tauchen auch bei der Einheitskreisdefinition explizit zentrale Begriffe und Symbole auf, deren Kenntnis notwendig für ein grundlegendes Verständnis dieser Charakterisierung ist. Diese Begriffe und Symbole sind: *Winkel, Einheitskreis, Punkt,* $P = (x, y)$, $\sin(\alpha)$und y-*Wert.* Für ein tieferes Verständnis ist ein vertrauter Umgang mit dem *Koordinatensystem* oder der *Parameterdarstellung von Kurven* hilfreich. Die Einheitskreisdefinition steht sowohl im engen Zusammenhang mit der Dreiecksdefinition als auch mit der Definition des Sinus über die Exponentialfunktion. Die Definitionen über die Funktionalgleichung und die Verdopplungsformel entsprechen den Additionstheoremen und der Formel für den doppelten Winkel. Beide Formeln können am Einheitskreis hergeleitet werden und erhalten erst dadurch eine inhaltliche Deutung. Diese Zusammenhänge werden im nächsten Abschnitt explizit besprochen.

Definition über die Umkehrfunktion der Bogenlängenfunktion des Einheitskreises: Die Definition des Sinus am Einheitskreis kann weiter formalisiert werden um einen Bogen zur Analysis und zur Differentialrechnung zu spannen. Dazu wird Sinus am Einheitskreis als Zuordnung interpretiert, die einem bestimmten Kreisbogenstück auf dem Einheitskreis die Länge einer Strecke y auf der y-Achse zuordnet. Ausgehend von dieser Deutung findet nun eine Formalisierung dieser Zuordnung statt. In einem ersten Schritt wird diese Zuordnung umgekehrt um eine Funktion aufzustellen, die zu einer gegebenen Länge x auf der x-Achse ein Kreisbogenstück auf dem Einheitskreis liefert. Anschließend wird der Sinus über die Umkehrfunktion dieser Funktion definiert. Die folgende Definition ist übernommen von Brown und Rice (2011) (Abbildung 4.20).

> *Sei* $s \in [-1, 1]$. *Die Bogenlänge des Einheitskreis zwischen den Punkten* $P = (0, 1)$ *und* $Q = \left(s, \sqrt{1 - s^2}\right)$ *ist gegeben durch*
>
> $$u = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

Abbildung 4.20
Arcussinus als Bogenlänge



Dann existiert eine Umkehrfunktion $s(x) : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]; s(u) = s$
Die Sinusfunktion wird auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *definiert. Es gilt:*

$$\sin(u) := s(u)$$

Durch eine Erweiterung von $s(u)$ auf die reellen Zahlen erhält man schließlich die Sinusfunktion in rein analytischer Form. Dazu wird $s(x)$ stückweise wie folgt definiert:

$$s_{-2}(x) : \left[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right] \to [-1, 1]; s_{-1}(x) = s(x + 2\pi)$$

$$s_{-1}(x) : \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]; s_{-1}(x) = s(-\pi - x)$$

$$s_0(x) = s(x)$$

$$s_1(x) : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to [-1, 1]; s_1(x) = s(\pi - x)$$

$$s_2(x) : \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \to [-1, 1]; s_1(x) = s(x - 2\pi)$$

Der Vorteil dieser fachlichen Charakterisierung liegt Brown und Rice (2011) zufolge darin, dass der Hauptnutzen der Trigonometrie in der Anwendung periodischer Funktionen liegt, die dazu dienen, periodische Prozesse zu modellieren, und ohne geometrische Anschauungen auskommen sollten. Der dreiecksfreie Zugang lässt tiefer hineinblicken in die mathematische Struktur des Sinus und liefert einen rein analytischen Zugang zu den Kerneigenschaften wie Periodizität, Symmetrieeigenschaften, der Ableitung und den Taylorreihen (Brown & Rice 2011).

Definition über die Exponentialfunktion: In der Hochschule, insbesondere im Laufe eines fachmathematischen Studiums, wird oftmals ein rein analytischer Zugang zur Sinusfunktion gewählt. Hierbei wird die Deutung am Einheitskreis sehr wohl thematisiert, die Sinusfunktion in ihrer analytischen Form wird jedoch mithilfe der Exponentialfunktion und von Potenzreihen definiert. Auf diese Weise löst sich die Analysis schlussendlich von der Geometrie und erreicht so eine höhere Ebene der Abstraktion. Diese fachliche Charakterisierung lässt schließlich eine analytische Fortsetzung der Sinusfunktion auf die komplexen Zahlen zu. Die Darstellung der Sinusfunktion mithilfe der Exponentialfunktion ist rein analytisch, kompakt und kann in einer Analysis Vorlesung genutzt werden, um nahezu nahtlos an bereits vorhandenes technisches Wissen über Exponentialfunktionen anzuschließen.

Die Funktion $\sin : C \to C$ *ist definiert über*

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Voraussetzung für ein grundlegendes Verständnis der Definition bilden die symbolischen Darstellungen: $\sin : C \to C$ und $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2\mathrm{i}}$. Darin enthalten sind die Konzepte: *Funktion, komplexe Zahlen, Wertebereich, Definitionsbereich* und *Exponentialfunktion.* Für ein tieferes Verständnis kann das Konzept der komplexwertigen Funktionen hilfreich sei. Es können Zusammenhänge zur Definition des Sinus am Einheitskreis, der Definition über Potenzreihen und zur Schwingungsdifferentialgleichung hergestellt werden.

Definition über Potenzreihen: Die Definition der Sinusfunktion mithilfe von Potenzreihen baut auf der Leitidee der Approximation auf, indem die ursprüngliche Funktion durch Taylorpolynome angenähert wird. Dadurch wird eine mögliche Rechenvorschrift gegeben, mit der Näherungswerte der Sinusfunktion ausgerechnet werden können.

Die Funktion sin R → R ist definiert über

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Bei dieser fachlichen Charakterisierung handelt es sich um eine vergleichsweise komplexe Definition, die auf eine beachtliche Menge an mathematischem Vorwissen und technischen Kompetenzen zurückgreift. Im Gegensatz zu den vorangegangenen Definitionen benötigt diese Definition umfangreiches implizites Wissen. Auch ist der symbolische Anteil wesentlich höher. Um ein grundlegendes Verständnis zu erlangen, ist die Kenntnis der folgenden symbolischen Darstellungen notwendig: $sin R \rightarrow R, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ und$\sin(x)$. Ein verständiger Umgang mit diesen Symbolen beinhaltet die direkte Kenntnis der Konzepte: *Funktion, Wertebereich, Definitionsbereich, Summenzeichen, Potenzregeln* und *Fakultät*. Implizite Konzepte, die zu einem tieferen Verständnis beitragen, sind: *Taylorreihen, Ableitung, Polynome* und *Grenzwerte.*

Definition über die Produktdarstellung: Neben der Darstellung als unendliche Reihe, kann die Sinusfunktion auch als unendliches Produkt dargestellt werden. Die folgende Definition der Sinusfunktion geht auf Euler zurück, der als Erster systematisch mit unendlichen Produkten gearbeitet und wichtige Produktentwicklungen aufgestellt hat. Bereits 1734 gab Euler eine Produktdarstellung der Sinusfunktion an (Remmert & Schumacher 2007).

Es gilt für alle $z \in C$

$$sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

Beweise für diese Aussage finden sich bei Remmert & Schumacher (2007). Dort wird gezeigt, dass die logarithmische Ableitung der Produktdarstellung gleich dem Kotangens ist. Da dies auch die logarithmische Ableitung der Sinusfunktion ist, müssen beide Funktionen bis auf einen konstanten Faktor identisch sein. Alternativ geben Remmert und Schumacher noch einen Beweis mithilfe der Verdopplungsformel an. Die Produktdarstellung des Sinus ist dem Bereich der Funktionentheorie zuzuordnen und entstammt der Theorie der unendlichen Produkte, die Ähnlichkeiten zu der Theorie der unendlichen Reihen aufweist. Entscheidend ist es, die Konvergenz eines solchen Produktes korrekt zu erfassen. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass ein unendliches Produkt genau dann konvergiert, wenn die Reihe aus Logarithmen der Faktoren konvergent ist (Balser 2008).

Um eine Funktion mit einer unendlichen Menge an Nullstellen zu konstruieren, wird der Produktsatz von Weierstraß benötigt, der mit konvergenzerzeugenden Faktoren arbeitet. Im Fall der Funktion $f(z) = \sin(\pi z)$ ist die Nullstellenmenge gleich den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Der Satz von Weierstraß liefert zu dieser Nullstellenmenge die obige Produktdarstellung. Es ist zu erkennen, dass zu jeder ganzen Zahl genau ein Faktor in dieser Darstellung gleich Null wird und das Produkt somit auf den ganzen Zahlen verschwindet.

Definition über die Schwingungsdifferentialgleichung: Eine fachliche Charakterisierung der Sinusfunktion, die besonders in der Physik eine Rolle spielt, liefert die Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung. Differentialgleichungen sind ein wesentliches Werkzeug der mathematischen Modellierung. Die Modellierung von Schwingungen eignet sich in besonderer Weise um den Nutzen der Sinusfunktion als Modellfunktion für periodische Prozesse zu motivieren.

Für $x \in R$ definieren wir die Funktionen sin $R \to R$ als Lösung der Differentialgleichung

$$f''(x) = -f(x)$$

Mit der Anfangsbedingung

$$f(0) = 0 \text{ und } f'(0) = 1$$

In dieser Definition werden nicht nur analytische, formale und technische Eigenschaften der Funktion beschrieben, sondern substantielle Eigenschaften geliefert, die in geeigneten Kontexten inhaltlich gedeutet werden können. In einem physikalischen Kontext kann die Sinusfunktion genutzt werden, um die momentane Auslenkung eines schwingenden Feder-Masse-Systems zu beschreiben. Die erste Ableitung beschreibt in diesem Szenario die Geschwindigkeit des Gewichtes zu einem bestimmten Zeitpunkt. Die zweite Ableitung ist ein Maß für die Beschleunigung. Die allgemeine Schwingungsdifferentialgleichung für ein Feder-Masse-System wird in der Physik durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$f''(t) = -\frac{D}{m} \cdot f(t)$$

Dabei bezeichnet D die Federkonstante und m die Masse. Eine Lösung der Differentialgleichung ist $f(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)$. Der physikalische Zusammenhang der durch diese Differentialgleichung beschrieben wird, lässt sich wie folgt ausdrücken:

> *Die Beschleunigung, die ein Gewicht an einem Federpendel erfährt, zeigt in Richtung der Ruheposition und ist proportional zur Auslenkung des Gewichts.*

Man erkennt in der Lösung außerdem, dass die Frequenz der Lösungsfunktion von der Masse abhängt. Da m im Nenner des Bruchs steht, gilt: Je größer die Masse ist, desto kleiner ist die Frequenz.

Definition über das Funktionalgleichungssystem: Blum und Törner (1983) stellen in ihrem Buch *Didaktik der Analysis* schulische Einführungen zu den elementaren nicht-algebraischen Funktionen vor, die neben den ganzrationalen Funktionen zu den wichtigsten Funktionen zählen. Zu diesen Funktionen gehören die Exponentialfunktion, die Logarithmusfunktion und die trigonometrische Funktion. Die unterschiedlichen Zugänge dienen dazu, Schülerinnen und Schüler „exemplarisch mit der charakterisierenden Axiomatik vertraut zu machen“ (Blum & Törner 1983). Blum und Törner unterscheiden zwischen der elementar geometrischen Einführung, der Einführung der Sinusfunktion über die Arcussinusfunktion, dem Zugang über die Differentialgleichung und der

axiomatischen Einführung über die Funktionalgleichung. Im Gegensatz zur algebraischen Funktion können nicht-algebraische Funktionen nicht durch die Angabe einer Zuordnungsvorschrift eingeführt werden. Darum müssen nicht-algebraische Funktionen auf andere Weise fachlich charakterisiert werden. Dieser Gedankengang führt bei der Exponentialfunktion und der Logarithmusfunktion zu den Funktionalgleichungen $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ und $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, die sich in diesen speziellen Fällen geradezu aufdrängen. Bei den Winkelfunktionen liegt der Sachverhalt etwas anders und es fehlt ein direkter Zugang zu den Funktionalgleichungen. Dennoch ist es möglich, sie durch eben solche zu charakterisieren:

Für $x \in R$ werden die Funktionen sin $R \to R$ und cos $R \to R$ als Lösung der Funktionalgleichungen definiert:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

mit den Bedingungen

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

$$\cos(0) = 1$$

Blum und Törner weisen darauf hin, dass es sich bei der Einführung der Sinusfunktion über die Funktionalgleichung um eine grundlagentheoretisch interessante Vorgehensweise handelt, diese jedoch nicht als Einführung der Winkelfunktionen geeignet ist.

Definition über die Verdopplungsformel: Der Vollständigkeit halber wird zum Schluss noch die Verdopplungsformel als charakteristische Funktionalgleichung der Sinusfunktion hervorgehoben (Remmert & Schumacher 2007).

Der Sinus ist gekennzeichnet durch die Eigenschaft

$$\sin(2\pi z) = 2\sin(\pi z)\sin\left(\pi\left(z + \frac{1}{2}\right)\right)$$

Sowohl die Additionstheoreme als auch die Verdopplungsformel können genutzt werden, um die Sinusfunktion zu definieren und sind damit charakterisierende Eigenschaften. Somit wird einmal mehr die Wichtigkeit dieser besonderen Gleichungen signalisiert und gezeigt, wie tief verankert sie im Kern der Trigonometrie sind.

4.3.2 Zusammenhänge zwischen den fachlichen Charakterisierungen

In diesem Abschnitt werden Zusammenhänge zwischen den fachlichen Charakterisierungen erklärt und mathematisch formalisiert.

Zusammenhang zwischen Dreiecksdefinition und Einheitskreisdefinition: Es wird an dieser Stelle gezeigt, dass die Definition des Sinus am rechtwinkligen Dreieck mit der Definition des Sinus auf dem Intervall $(0, 90°)$ beziehungsweise $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ übereinstimmt. Die Definition des Sinus am rechtwinkligen Dreieck induziert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der rechtwinkligen Dreiecke. Dreiecke, die in einer Äquivalenzklasse liegen, haben das gleiche Seitenverhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse. Dadurch sind auch alle weiteren Seitenverhältnisse gleich. Alle Dreiecke einer Äquivalenzklasse sind damit ähnlich zueinander. In jeder Klasse liegt ein Repräsentant, dessen Hypotenuse die Länge 1 besitzt (Abbildung 4.21). Bettet man dieses Dreieck wie in Abbildung 4.22 in ein Koordinatensystem ein, erhält man einen Punkt P auf dem Einheitskreis, dessen y-Koordinate dem entsprechenden Seitenverhältnis im rechtwinkligen Dreieck entspricht.

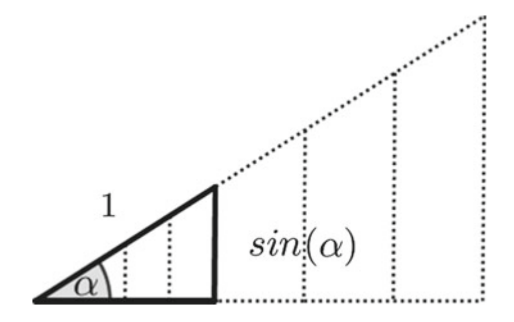


Abbildung 4.21
Äquivalenzklasse von rechtwinkligen Dreiecken

Auf der anderen Seite lässt sich zu jedem Punkt P im ersten Quadranten auf dem Einheitskreis ein rechtwinkliges *Referenzdreieck* konstruieren, indem der Punkt P auf die x-Achse projiziert wird (vgl. Abbildung 4.22). Jedes dieser Referenzdreiecke ist Repräsentant einer Äquivalenzklasse. Da die Hypotenuse des Referenzdreiecks die Länge 1 hat, entspricht die y-Koordinate des Punktes P dem entsprechenden Seitenverhältnis.

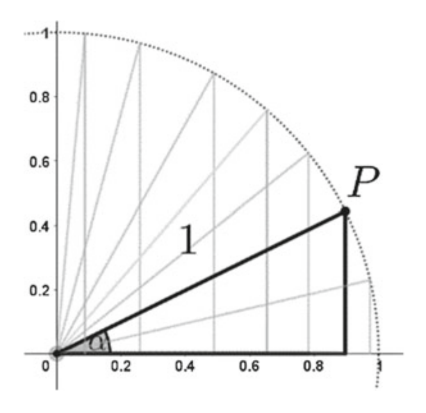


Abbildung 4.22
Einheitskreis mit Referenzdreieck

Die beiden Definitionen gleichen sich auf dem Intervall $(0, 90°)$ beziehungsweise auf $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und sind unabhängig von der Wahl eines Repräsentanten. Die Definition des Sinus am Einheitskreis lässt sich auf die reellen Zahlen erweitern.

Zusammenhang zwischen der Definition am Einheitskreis und über die Umkehrfunktion der Bogenlängenfunktion: Durch die Umkehrung der Bogenlängenfunktion wird die geometrische Definition am Einheitskreis formalisiert und damit der Analysis zugänglich gemacht. Die Sinusfunktion ordnet einem

Kreisbogenstück der Länge α die Länge s auf der y-Achse zu (vgl. Abbildung 4.23 links). Die Umkehrfunktion der Sinusfunktion $\arcsin(s)$ kehrt diese Zuordnung um; einem Stück auf der y-Achse wird die Länge eines Bogenstücks α zugeordnet: $\arcsin(s) = \alpha$. Da üblicherweise Abbildungen angeschaut werden, die Werte auf der x-Achse als Argumente nehmen, wird das Koordinatensystem für die Umkehrfunktion $\arcsin(s)$ an der Geraden $y = x$ gespiegelt (vgl. Abbildung 4.23). Ziel ist es nun, zum Wert s den passenden Kreisbogenabschnitt α zu berechnen.

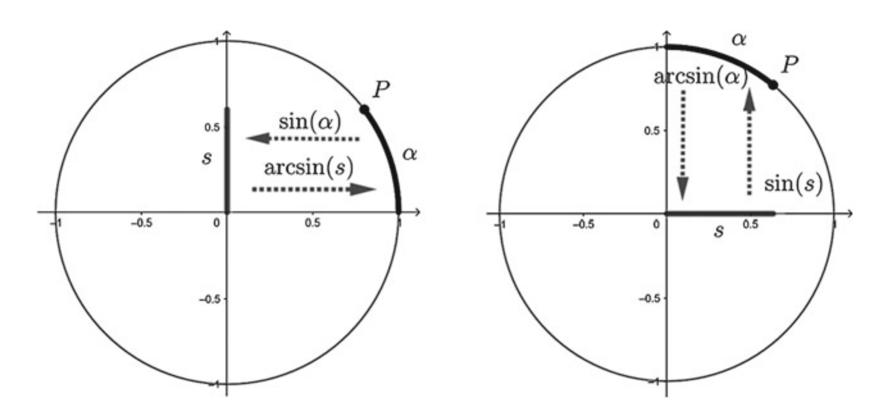


Abbildung 4.23 Arkusinusfunktion

Die obere Hälfte des Einheitskreises über der x-Achse kann durch den positiven Teil der Wurzelfunktion $f(x) = +\sqrt{1-x^2}$ dargestellt werden. Die Bogenlänge einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[0, s]$ kann mit der Formel $L_f(s) = \int_0^s \sqrt{1 + \left(f(x)'\right)^2} \cdot dx$ berechnet werden. Für ein $s \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ erhält man damit für die Bogenlänge α:

$$\alpha = \int_0^s \sqrt{1 + \left(f(x)'\right)^2} \cdot dx = \int_0^s \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)\right)^2} \cdot dx = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$$

Bei dem ermittelten Funktionsterm auf der rechten Seite der Gleichung handelt es sich um die Integraldarstellung der Arkussinusfunktion. Die Umkehrfunktion der Arkussinusfunktion entspricht daher der Sinusfunktion.

Zusammenhang zwischen der Definition über die Exponentialfunktion und der Definition am Einheitskreis: Es folgt eine geometrische Deutung der Gleichung am Einheitskreis:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Für den Betrag von e^{ix} gilt: $\left|e^{ix}\right|^2 = e^{ix} \cdot \overline{e^{ix}} = e^{ix} \cdot e^{\overline{ix}} = e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^0 = 1$

Die Werte von e^{ix} haben einen Abstand von 1 zum Ursprung und liegen somit auf dem Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene. Weiterhin sind e^{ix}. und e^{-ix} komplex konjugiert zueinander, das bedeutet, dass sie an der x-Achse gespiegelt sind. Dementsprechend sind e^{ix} und $-e^{-ix}$ auch an der y.-Achse gespiegelt. Werden beide Terme addiert, verschwindet der reelle Part und das Ergebnis liegt auf der imaginären Achse und ist betragsmäßig doppelt so groß wie der Imaginärteil von e^{ix}. . Durch die Division mit $2i$ entsteht einen reeller Wert, der dem Sinus von x entspricht (vgl. Abbildung 4.24).

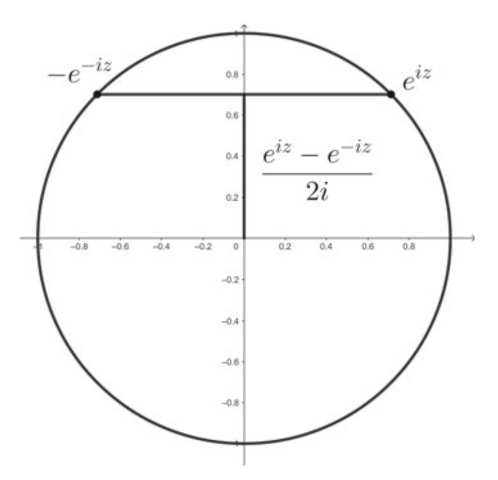


Abbildung 4.24 Die Definition über die Exponentialfunktion am Einheitskreis

Zusammenhang zwischen der Definition über die Exponentialfunktion und der Definition über Potenzreihen: Das entscheidende Bindeglied zwischen den beiden Darstellungen liegt in der eulerschen Formel $e^{iz} = \cos(z) + i \cdot \sin(z)$. Diese Formel kann auf algebraischem Wege verifiziert werden, indem die Theorie der

Taylorreihen hinzugezogen wird. Dazu reicht die Kenntnis der n-ten Ableitung der Exponentialfunktion, der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion aus.

Funktion	***n*-te Ableitung**
$f(x) = e^x$	$f^{(n)}(x) = e^x$
$f(x) = \sin(x)$	$f^{(n)}(x) = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \sin(x)$ für n. gerade $f^{(n)}(x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \cos(x)$ für n ungerade
$f(x) = \cos(x)$	$f^{(n)}(x) = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \cos(x)$ für n gerade $f^{(n)}(x) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \sin(x)$ für n ungerade

Die Taylorreihe einer Funktion $g(x)$ um die Stelle 0 wird durch folgende Vorschrift gebildet:

$$T_g(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Somit entsteht für die Exponentialfunktion die Reihe:

$$T_{e^x}(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^0}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

für die Sinusfunktion:

$$T_{\sin(x)}(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin(0)}{2n!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cos(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

und für die Kosinusfunktion:

$$T_{\cos(x)}(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cos(0)}{2n!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Es ist bereits zu erkennen, dass sich die Potenzen in der Taylorreihe der Exponentialfunktion auf die Taylorreihe der Sinus- und Kosinusfunktion aufteilen. Hierbei tauchen die ungeraden Exponenten in der Sinusfunktion und die geraden Exponenten in der Kosinusfunktion auf. Das alternierende Vorzeichen lässt sich durch das rein komplexe Argument erklären, denn es gilt $i^{2n} = (-1)^n$ und $i^{2n+1} = (-1)^n \cdot i$ und damit:

$$\begin{aligned} T_{e^x}(ix, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} \dots \\ &= 1 + i - \frac{x^2}{2!} - i \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \cdot \frac{x^5}{5!} + \dots \\ &= i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{x^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= i \cdot T_{\cos(x)}(x, 0) + T_{\sin(x)}(x, 0) \end{aligned}$$

Mit dieser Gleichheit zeigt sich schließlich die Korrektheit der eulerschen Gleichung und man erhält:

$$\begin{aligned} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} &= \frac{\cos(x) + i\sin(x) - (\cos(-x) + i\sin(-x))}{2i} \\ &= \frac{\cos(x) + i\sin(x) - (\cos(x) - i\sin(x))}{2i} \\ &= \frac{2 \cdot i \cdot \sin(x)}{2i} = \sin(x) \end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen der Potenzreihendarstellung und der Produktdarstellung: Mit den Taylorreihen als Grenzwert der Taylorpolynome ist es möglich, auch nicht-algebraische Funktionen wie die Sinusfunktion als unendliche Summe von Potenzen einer Variable darzustellen. Jedes Taylorpolynom ist endlich und zerfällt nach dem Hauptsatz der linearen Algebra über den komplexen Zahlen in Linearfaktoren. So ist es möglich, zu der Folge der n-ten Taylorpolynome eine Folge von Produktdarstellungen zu konstruieren. Es stellt sich dann die Frage, ob diese Folge von Produktdarstellungen konvergiert und wie ein solcher Grenzwert

aussieht. Der weierstraßsche Produktsatz gibt eine Antwort auf diese Frage und führt zur Produktdarstellung des Sinus.

Zusammenhang zwischen der Definition über die Exponentialfunktion und der Schwingungsdifferentialgleichung: Bei der Schwingungsdifferentialgleichung handelt es sich um eine lineare homogene Differentialgleichung 2. Grades. Die Anfangsbedingungen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ legen eine eindeutige Lösung fest, die mit dem Exponentialansatz gefunden werden kann. Dafür wird $f(x) = e^{\lambda x}$ gesetzt. Eingesetzt in die Differentialgleichung $f''(x) = -f(x)$ erhält man $\lambda^2 = -1$, also $\lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm i$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet:

$$f(x) = c_1 e^{-ix} + c_2 e^{ix}$$

Aus den Anfangsbedingungen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ ergibt sich das folgenden lineare Gleichungssystem:

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$-i \cdot c_1 + i \cdot c_2 = 1$$

Und damit $c_1 = \frac{-1}{2i}$ und $c_2 = \frac{1}{2i}$. Die spezielle Lösung lautet:

$$\frac{-e^{-ix} + e^{ix}}{2i} = \sin(x)$$

Alternativ kann dieser Zusammenhang rein algebraisch durch direktes zweifaches Ableiten der über die Exponentialfunktion definierten Sinusfunktion gezeigt werden. Es gilt:

$$f(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$f'(z) = \frac{i \cdot e^{iz} - (-i) \cdot e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$f''(z) = \frac{i \cdot e^{iz} + (-i) \cdot e^{-iz}}{2} = \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = -f(z)$$

Außerdem gilt $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$, damit ist $f(z)$ die eindeutige Lösung der Differentialgleichung.

Zusammenhang zwischen der Schwingungsdifferentialgleichung, der Verdopplungsformel und dem Funktionalgleichungssystem: Die Definition über die Schwingungsdifferentialgleichung unterscheidet sich von den vorherigen Definitionen im Wesentlichen dadurch, dass bei diesem Zugang weder eine konkrete Rechenvorschrift noch eine geometrische Interpretation angegeben wird. Stattdessen wird die Sinusfunktion mit einer für sie charakterisierenden Eigenschaft beschrieben: *die zweite Ableitung der Funktion ist gleich der negativen Ursprungsfunktion.* Eine Funktion, die dieser Differentialgleichung genügt und die außerdem die Anfangsbedingungen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ erfüllt, ist die Sinusfunktion. Eine ähnliche Differentialgleichung ist von der Exponentialfunktion bekannt, bei der die erste Ableitung der Ursprungsfunktion gleicht. In diesem Sinne ähnelt diese Art der Charakterisierung der Definition über die Verdopplungsformel und über das Funktionalgleichungssystem. In allen drei Fällen wird die Sinusfunktion in gewisser Weise *axiomatisch* eingeführt. Das heißt, es werden Eigenschaften einer Funktion vorgeschrieben, welche die Funktion vollständig charakterisieren ohne dabei Aussagen über deren Anwendung oder Rechenvorschrift zu machen. Die Verdopplungsformel gibt an, wie sich der Funktionswert verändert, wenn das Argument verdoppelt wird und macht damit Aussagen über das charakteristische Kovariationsverhalten der Sinusfunktion im multiplikativen Fall. In Analogie dazu führt beispielsweise bei quadratischen Funktionen die Multiplikation des Arguments mit dem Faktor 2 zu einer Vervierfachung des Funktionswertes. Das Funktionalgleichungssystem erklärt wiederum, wie sich Werte der trigonometrischen Funktionen verhalten, wenn zwei Argumente addiert werden. Dieses Gleichungssystem ist für die trigonometrischen Funktionen genauso charakterisierend, wie es die Gleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für die linearen Funktionen ist.

Zusammenhang zwischen dem Funktionalgleichungssystem, der Verdopplungsformel, der Definition des Sinus am rechtwinkligen Dreieck und am Einheitskreis: Bei dem Funktionalgleichungssystem handelt es sich um die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus. Diese können sowohl am Einheitskreis als auch am rechtwinkligen Dreieck hergeleitet werden. Im Folgenden betrachten wir die Herleitung mithilfe rechtwinkliger Dreiecke (vgl. Abbildung 4.25):

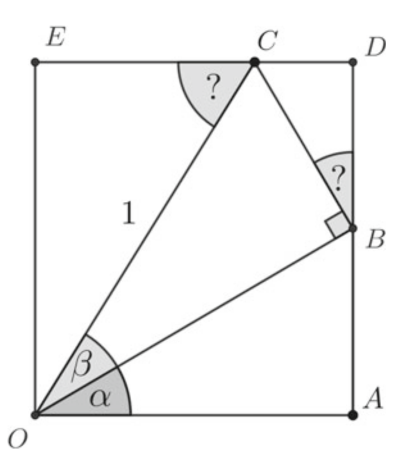


Abbildung 4.25
Herleitung der Additionstheoreme mithilfe rechtwinkliger Dreiecke

Da die Strecke $OC = 1$ ist, gelten mit der Definition des Sinus als Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete im rechtwinkligen Dreieck die folgenden Gleichungen:

$$OB = \cos(\beta) \text{ und } CB = \sin(\beta)$$

Weiterhin gilt:

$$OA = \cos(\beta)\cos(\alpha) \text{ und } AB = \sin(\alpha)\cos(\beta)$$

Da der gesuchte Winkel an der Stelle B gleich dem Winkel α ist, erhält man außerdem die folgenden Gleichungen:

$$DB = \cos(\alpha)\sin(\beta) \text{ und } CD = \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Der gesuchte Winkel am Punkt C beträgt $\alpha + \beta$ und damit gilt:

$$EC = \cos(\alpha + \beta) \text{ und } OE = \sin(\alpha + \beta)$$

Es gilt weiterhin:

$$EC = OA - CD$$

$$OE = DB + BA$$

Wird alles zusammengefügt, erhält man die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha)$$

Aus den Additionstheoremen folgt schließlich auch die Verdopplungsformel, denn es gilt:

$$\sin(2 \cdot \alpha) = \cos(\alpha)\sin(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$= 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin\left(\alpha + 90^\circ\right)$$

4.3.3 Die Ableitung der Sinusfunktion

Wie in den vorigen Abschnitten gezeigt wurde, spielt die Ableitung der Sinusfunktion eine wichtige Rolle, wenn es darum geht den Zusammenhang zwischen bestimmten Darstellungen herzustellen oder zu überprüfen, ob eine gewählte Darstellung der Sinusfunktion korrekt ist. So ergibt sich beispielsweise die Potenzreihenentwicklung der Sinusfunktion aus der Kenntnis der Ableitung der Exponentialfunktion, des Sinus und des Kosinus. Die Produktdarstellung erweist sich als korrekt, weil ihre logarithmische Ableitung mit der des Sinus übereinstimmt und die Definition über die Schwingungsdifferentialgleichung macht Aussagen über die zweite Ableitung der Sinusfunktion. Daher wird in diesem Abschnitt die Ableitung der Sinusfunktion – unter Berücksichtigung formaler und anschaulicher Aspekte – dargestellt.

Der klassische algebraische Beweis um die Kosinusfunktion als Ableitung der Sinusfunktion zu etablieren, verläuft über die Bildung des Differentialquotienten für $\sin(x)$ unter zur Hilfenahme des Additionstheorems:

$$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(\mathrm{x})\sin(\mathrm{h}) \tag{4.1}$$

und der Grenzwerte:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \tag{4.2}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0 \tag{4.3}$$

Die Additionstheoreme wurden bereits im vorigen Abschnitt bewiesen. Für den Grenzwert in Gleichung 4.2) betrachte man Abbildung 4.26:

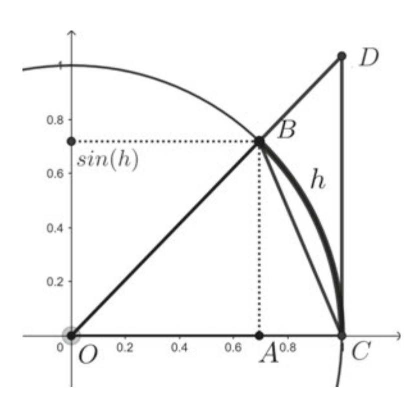


Abbildung 4.26
Grenzwert sin(h)/h

Für die Flächen der Dreiecke ΔOCB und ΔOCD, sowie die Fläche des Kreissegments $\measuredangle OCB$ gilt die folgende Ungleichung:

$$\Delta OCB \leq \measuredangle OCB \leq OCD$$

Weiterhin lassen sich die Flächen mit den folgenden Formeln berechnen:

$$\Delta OCB = \frac{\sin(h)}{2}\ ,\ \measuredangle OCD = \frac{h}{2} \text{ und } \Delta OCD = \frac{\tan(h)}{2}$$

Damit ergibt sich:

$$\sin(h) < h < \tan(h) \qquad \Rightarrow \qquad 1 \geq \frac{\sin(h)}{h} \geq \cos(h)$$

Für den Grenzwert $h \to 0$ erhält man den gesuchten Grenzwert. Der Grenzwert in Gleichung 4.3) lässt sich durch die folgende Gleichungskette beweisen (Korntreff 2018):

$$\frac{\cos(h) - 1}{h} = -\frac{1 - \cos\left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right)}{h} = -\frac{1 - \cos\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{h}{2}\right)^2}{h}$$

$$= -\frac{2 \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)^2}{h} = -\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)$$

Mit dem Grenzwert aus Gleichung 4.2) folgt das gesuchte Ergebnis. Für den Differentialquotienten gilt dann:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \lim_{\mathrm{h}\to 0} \cos(x) \frac{\sin(h)}{h}$$

$$= \cos(x)$$

Es handelt sich um einen formal deduktiven Beweis, der kaum an konkrete geometrische Vorstellungen des Sinus anknüpft. Kirsch (1979) hält in seiner Arbeit dennoch ein starkes Plädoyer für die Behandlung der Ableitung der Sinusfunktion in der Schule. Statt des klassischen algebraischen Beweises, liefert Kirsch Alternativen um die Ableitung der Sinusfunktion verständnisorientiert zu unterrichten und auf den geometrischen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler aufzubauen. Dazu wird die Sinusfunktion anhand des Funktionsgraphen zeichnerisch differenziert, um die Gleichung $sin'(x) = \cos(x)$ anschaulich zu begründen. Anschließend wird eine inhaltliche Begründung des Sachverhaltes geliefert. Dies kann durch eine Argumentation am Einheitskreis geschehen. Kirsch stellt dazu verschiedene Ansätze vor, die in ihrer mathematischen Strenge variieren. Ein anschaulicher präformaler Beweis nutzt die folgende Skizze (vgl. Abbildung 4.27):

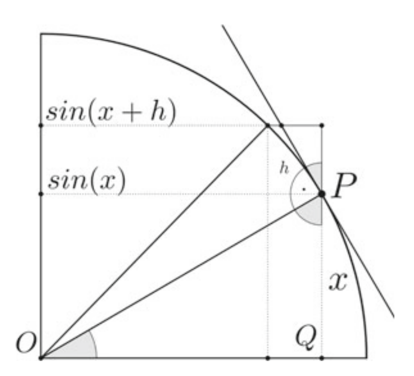


Abbildung 4.27 Ableitung der Sinusfunktion am Einheitskreis (vgl. Kirsch 1979)

In dieser Skizze zeigt sich, wie sich die y-Koordinate eines Punktes P verändert, wenn dieser ein kleines Stück h entlang des Kreisbogens läuft. Für sehr kleine Bogenstücke h kann dieser Teil durch die Tangente angenähert werden. Hierdurch entsteht ein kleines rechtwinkliges Dreieck am Punkt P, das ähnlich zu dem großen Dreieck ΔOQP ist. Werden nun die entsprechenden Seitenverhältnisse in beiden Dreiecken verglichen, erhält man die Gleichung:

$$\frac{\cos(x)}{1} = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

Ein ganz ähnliches Argument kann in der Differenzenmethode des Aryabhata (vgl. Abschnitt 4.2.8) gefunden werden. Auch die Ableitung als momentane Änderungsrate lässt sich durch geeignete periodische Prozesse in Verbindung mit der Sinusfunktion bringen (Katter 2017).

Eine andere Möglichkeit, die Ableitung der Sinusfunktion zu verstehen, erhält man, indem der Einheitskreis als Kurve aufgefasst wird, die über die Sinus- und Kosinusfunktion parametrisiert ist $\phi : R \to R^2$, $\phi(x) = (\cos(x), \sin(x))$. Die geometrische Deutung der Ableitung von ϕ am Punkt x_0 entspricht dem Tangentialvektor am Einheitskreis mit der Länge 1 (vgl. Abbildung 4.28). Dieser steht orthogonal zum Radius. Wird der Tangentialvektor in den Ursprung verschoben, ist zu erkennen, dass dieser Vektor dem Ortsvektor des Punktes $\phi(x_0)$ um 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$ vorrauseilt. Somit folgt:

$$\phi'(x_0) = \big(cos'(x_0), sin'(x_0)\big) = (-\sin(x_0), \cos(x_0))$$

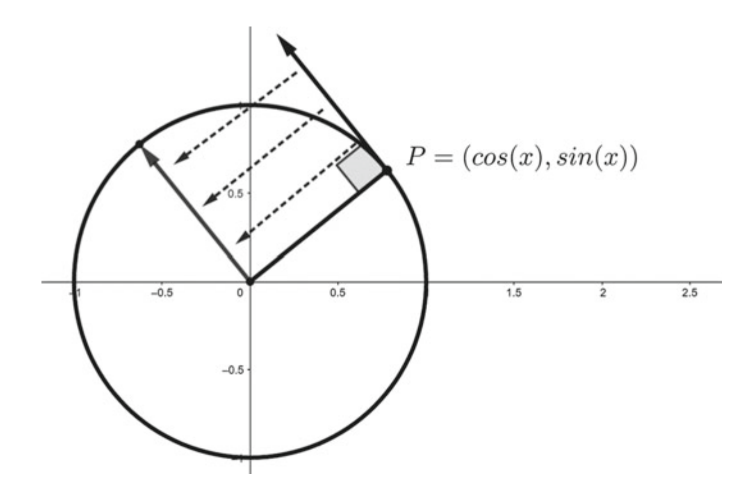


Abbildung 4.28 Anschauliche Begründung der Ableitung der Sinusfunktion am Einheitskreis

Zusammenfassung: Durch die logische Genese der Trigonometrie wird deutlich, dass die Sinusfunktion auf äußerst vielfältige Weise definiert bzw. dargestellt werden kann. Jede der untersuchten Definitionen bildet gewisse Aspekte der Sinusfunktion ab und erfüllt dadurch unterschiedliche Zwecke. Die geometrischen Definitionen am rechtwinkligen Dreieck und am Einheitskreis sind aufgrund ihrer Anschaulichkeit im besonderen Maße dazu geeignet, Grundvorstellungen beim Lernenden aufzubauen. Mithilfe der explizit und implizit verwendeten mathematischen Konzepte ist es möglich, bei der Formulierung von Grundvorstellungen entsprechende Grundkenntnisse zu benennen, die notwendig sind, um ein Grundverständnis aufzubauen. Im Falle der Definition am rechtwinkligen Dreieck ist eins dieser implizit verwendeten Konzepte die „Ähnlichkeit von Dreiecken". Die zugehörige Grundkenntnis, die zur Definition am rechtwinkligen Dreieck gehört, lautet: *entsprechende Seitenverhältnisse in ähnlichen Dreiecken sind gleich.* Auch zu den formal algebraischen Definitionen ist es denkbar, spezifische Grundvorstellungen mit entsprechenden Grundkenntnissen zu formulieren, die sich im jeweiligen mathematischen Gebiet als nützlich erweisen.

4.4 Anwendungskontexte der Trigonometrie

Anwendungskontexte sind der Schlüssel zur Konzeption fächerverbindenden Unterrichts. Sie können auf Schülerinnen und Schüler durch ihre Anwendungsrelevanz motivationsfördernd wirken und bilden außerdem die Grundlage für tragfähige Individualvorstellungen. Im Schulunterricht beziehen sich die Anwendungskontexte der Trigonometrie zu einem Großteil auf die Berechnung von Seiten in rechtwinkligen Dreiecken, dabei haben viele Anwendungskontexte trigonometrischer Funktionen nur wenig mit Dreiecken zu tun. Trigonometrische Funktionen sind unsere ständigen Begleiter, wenn wir einen Anruf auf einem Handy entgegennehmen, uns mit einem Laptop ins W-Lan einloggen oder Musik über eine Stereoanlage hören. Bei all diesen Phänomenen spielen elektromagnetische und mechanische Wellen, die durch den Graphen der Sinusfunktion dargestellt und mathematisch modelliert werden können, eine entscheidende Rolle. Die Ähnlichkeit zwischen dem Funktionsgraphen der Sinusfunktion und der Momentaufnahme einer schwingenden Saite lässt auf die wesentliche Bedeutung trigonometrischer Funktionen auch in der Musiktheorie schließen. Ähnlich bedeutend sind diese Welleneigenschaften bei der Untersuchung von Wellenbewegungen in der Ozeanographie, Seismologie und der Radiologie. Sie sind außerdem ein wichtiges Werkzeug um wiederkehrende Phänomene aus Bereichen der Klimaforschung, der Biologie und der Ökonomie zu modellieren (Brown & Rice 2011). Eine der weitreichendsten Anwendungen trigonometrischer Funktionen liegt im Einsatz von Fourierreihen: unendliche Summen von Sinus- und Kosinusfunktionen mit denen alle periodischen Funktionen approximiert werden können. Durch die sogenannte Fourieranalyse können Funktionen in ihre periodischen Anteile zerlegt werden. Diese Technik ist außerordentlich nützlich bei der Lösung partieller Differentialgleichung, wie der Wärmeleitungsgleichung, da Sinusfunktionen besonders einfache Lösungen dieser Gleichung liefern. Ein weiteres Einsatzgebiet ist die Signalverarbeitung, wo beispielsweise durch die diskrete Kosinustransformation die Größe von Video-, Audio- und Bilddateien verändert werden kann (Mali & Müller 2000).

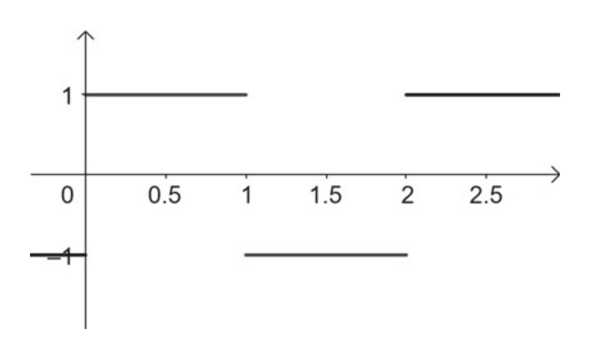
4.4.1 Fourieranalyse

In Abschnitt 4.3.2 wurde gezeigt, wie mithilfe der Taylorpolynome die Sinusfunktion sin als unendliche Summe von Potenzen der Variable x dargestellt werden kann. Charles Fourier (1772–1837) drehte den Spieß um: Statt trigonometrische Funktionen durch Polynome auszudrücken, konstruierte er eine Reihe

von Funktionen, indem er Sinus- und Kosinusfunktionen nutzte. Diese Fourieranalyse ist in der Lage, periodische Funktionen in ihre elementaren Bausteine aufzubrechen. Man stelle sich vor, ein Geiger spiele zwei Saiten seiner Geige gleichzeitig an: Beide Saiten senden jeweils eine Schallwelle aus. Ein Mikrophon, das diesen Klang aufnimmt, registriert jedoch nur eine Schallwelle und zwar die Überlagerung dieser beiden Schallwellen. Mit der Methode von Fourier ist es rechnerisch möglich, aus dieser Schallwelle die Frequenzen der beiden Saiten zurückzugewinnen.

Darüber hinaus können selbst unstetige Funktionen durch eine unendliche Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen approximiert werden. Ein klassisches Beispiel ist die Rechteckschwingung, die zwischen zwei Werten hin und her schwingt (vgl. Abbildung 4.29).

Abbildung 4.29
Rechteckschwingung



Diese Rechteckschwingungen werden beispielsweise bei der Klangerzeugung in Synthesizern benutzt. Die Fourierreihe für die Rechteckschwingung mit einer Amplitude von 1 und einer Periode von 2 lautet (van Brummelen 2020):

$$\frac{4}{\pi}\sin(\pi t)+\frac{4}{3\pi}\sin(3\pi t)+\frac{4}{5\pi}\sin(5\pi t)+\frac{4}{7\pi}\sin(7\pi t)+\ldots$$

Um die Koeffizienten und die Frequenzen der Fourierreihe zu finden, wird folgendermaßen vorgegangen: Fouriers Annahme besagt im diskreten Fall, dass eine periodische Funktion $f(t)$ durch die Summe: $f(t) \approx \sum_{k=1}^{n}(a_k \sin(k\pi t) + b_k \cos(k\pi t))$ approximiert werden kann. Da es sich bei der Rechteckschwingung um eine ungerade Funktion handelt, kann auf den Kosinusteil verzichtet werden. Die Aufgabe besteht nun also darin, die Koeffizienten a_k zu finden. Dazu wird zunächst $f(t)$ mit $\sin(t)$ multipliziert.

$$f(t) \cdot \sin(\pi t) = a_1 \cdot \sin(\pi t)^2 + a_2 \cdot \sin(2\pi t) \cdot \sin(\pi t) + a_3 \cdot \sin(3\pi t) \cdot \sin(\pi t) + \ldots$$

Anschließend wird das Integral der einzelnen Summanden auf dem Intervall [0,2] berechnet. Bei allen Summanden, außer bei a_1, verläuft die Kurve des Produktes genau so viel oberhalb wie unterhalb der x-Achse, wodurch alle Summanden bis auf einen verschwinden. Diese Eigenschaft wird auch als Orthogonalitätsrelation bezeichnet. Es gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin(m \cdot t) \sin(n \cdot t) = \begin{cases} 0 für n \neq m \\ 1 für n = m \end{cases}$$

Das bedeutet:

$$\int_0^2 f(t) \sin(\pi t) dt = \int_0^2 a_1 \sin(\pi t)^2 dt$$

Auf der rechten Seite der Gleichung bleibt a_1 stehen. Für die linke Seite gelangt man zu folgender Rechnung:

$$f(t) = \begin{cases} 1\, x \in [0, 1] \\ -1\, x \in [1, 2] \end{cases}$$

$$\int_0^2 f(t) \sin(\pi t) dt = 2 \int_0^1 \sin(\pi t) dt = 2 \left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi} \right]_0^1 = \frac{4}{\pi} = a_1$$

In gleicher Weise fährt man für a_n fort, indem $f(t)$ mit $\sin(n\pi t)$ multipliziert wird.

4.4.2 Schwingungen und Wellen

Als Schwingungen werden zeitlich periodische Schwankung einer Zustandsgröße bezeichnet, wohingegen eine Welle als räumliche Ausbreitung einer Schwingung definiert wird (Magnus et al. 2016). Schwingungen und Wellen tauchen

in der Natur und in vielen Bereichen der Technik auf: es ändert sich in regelmäßigen Abständen der Wasserstand in Küstengebieten durch die Gezeitenkräfte, eine Gitarrensaite schwingt auf und ab und erzeugt dadurch eine Schallwelle, Schwingkreise in einem Radiosender erzeugen elektromagnetische Wellen, die Informationen über weite Distanzen übermitteln können. Der Zustand dieser Systeme kann durch die geeignete Wahl einer Zustandsgröße beschrieben werden: Höhe, Druck, elektrische Spannung etc. Schwingungen beschreiben die zeitliche Änderung $x(t)$ dieser Zustandsgröße. Von besonderem Interesse sind Vorgänge, in denen sich diese Zustandsgrößen periodisch ändern. In diesen Fällen gilt:

$$x(t + T) = x(t)$$

Der Wert T wird als Periode oder Schwingungsdauer bezeichnet. Die Frequenz f ergibt sich als Kehrwert der Periode $f = \frac{1}{T}$ und wird in Hertz angegeben. Ein weiterer Kennwert einer periodischen Schwingung ist die Amplitude. Die Amplitude A gibt den Maximalwert der Schwingung an $A = x_{max}$ an. Die Schwingung der A-Saite einer Gitarre durchläuft innerhalb einer Sekunde 110 Schwingungen. Die Periodenlänge beträgt also $\frac{1}{110}$ Sekunden, die Frequenz beträgt 110 Hertz. Die Amplitude hängt von der Spannkraft der Saite ab und bewegt sich in einem Bereich von ca. $-1mm$ bis $+1mm$. Die Schallwelle, die von dieser Saite ausgesendet wird, entsteht durch Luftstöße, die den Luftdruck in Richtung der Schallwelle in stetiger Weise erhöhen und verringern. Bei einer Schallgeschwindigkeit von $343,2$ m/s entsteht so eine Schallwelle mit einer Wellenlänge von $3,12$ Metern.

Ein Schwingungsvorgang wird meist in einem s,t-Diagramm dargestellt. Auf der x-Achse wird die Zeit t und auf der y-Achse der Wert s der Zustandsgröße abgetragen. Eine gleichförmige periodische Schwingung liefert auf diese Weise den Graphen einer Sinusfunktion. Ein weiterer Zusammenhang besteht zwischen der Sinusfunktion und einer gleichförmigen Kreisbewegung, der mithilfe eines Zeigerdiagramms veranschaulicht werden kann.

Die Sinusfunktion bildet bei vielen in der Natur und der Technik vorkommenden Prozessen eine gute Annäherung und wird zur Modellierung eben jener Phänomene genutzt. Auch bei nicht gleichförmigen Schwingungen bietet sich die Sinusfunktion an. Durch eine Kombination aus Sinusfunktionen mit unterschiedlichen Frequenzen können auch kompliziertere periodische Prozesse modelliert werden.

4.4.3 Rundfunk

Mit der Entdeckung der elektromagnetischen Wellen durch Heinrich Hertz (1857–1894) begann auch die Geschichte des Rundfunks. In kürzester Zeit wurde das Phänomen der elektromagnetischen Schwingkreise genutzt und durch Radioempfänger technisch salonfähig gemacht. Damit war es möglich, Informationen umgehend über weite Strecken zu senden und damit nahezu jegliches physische Hindernis zu überwinden. Dabei wurden die gewünschten Informationen, wie zum Beispiel eine Audiobotschaft, den elektromagnetischen Wellen gewissermaßen aufgeprägt. Eine Radiostation nutzt dafür eine Welle mit einer bestimmten Trägerfrequenz. Der Frequenzbereich eines handelsüblichen Ultrakurzwellen-(UKW) Radios liegt zwischen 87–108 Megahertz. Also ca. 100 Millionen Oszillationen in der Sekunde. Um eine Audiobotschaft über eine Radiostation mit einer elektromagnetischen Trägerfrequenz zu verschicken, können analoge Modulationsverfahren verwendet werden. Die Modulation einer sinusförmigen Trägerschwingung erfolgt durch eine zeitliche Änderung der Amplitude a, der Frequenz f oder der Phase ϕ:

$$x(t) = a \sin(2\pi bt + \phi)$$

Je nachdem welcher Parameter verändert wird, wird von der Amplitudenmodulation (AM), Frequenzmodulation (FM) oder Phasenmodulation (PM) gesprochen (Roppel 2006). In den Anfängen des Rundfunks wurde hauptsächlich die Amplitudenmodulation genutzt. Diese ist einfach umzusetzen, hat allerdings eine geringere Bandbreite als die Frequenzmodulation und ist zudem auch störanfälliger. Sie wird auf ein Frequenzband von 0 bis 4,5 Kilohertz übertragen.

Bei der Amplitudenmodulation wird die Amplitude einer hochfrequenten Trägerschwingung $x(t) = A \cdot \sin(2\pi ft)$ durch ein analoges Signal $s(t)$ moduliert (vgl. Abbildung 4.30). Mathematisch wird diese Modulation durch ein Produkt der beiden Funktionen beschrieben:

$$x_s(t) = (1 + \mu s(t)) \cdot x(t)$$

Die Amplitude des analogen Signals ist auf 1 normiert, somit gilt $|s(t)| < 1$ und der Modulationsindex μ liegt zwischen 0 und 1.

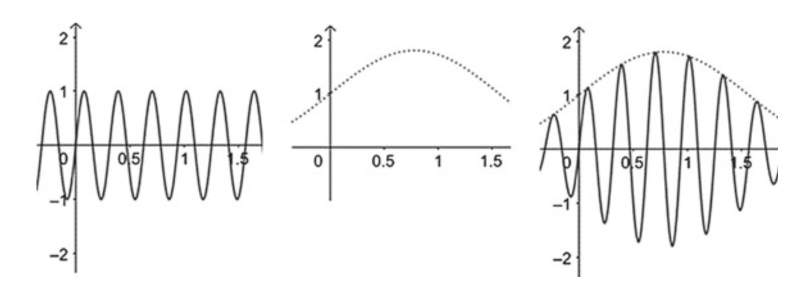


Abbildung 4.30 Amplitudenmodulation einer Sinuswelle ($x(t)$, $(1 + 0,9s(t))$ und $x_s(t)$)

Dieses Beispiel zeigt, wie sich der Nutzen der trigonometrischen Funktionen im Laufe der Zeit gewandelt hat. Dienten die Sinus- und Kosinusfunktionen bis zum 16. Jahrhundert hauptsächlich dazu, geometrische Probleme zu lösen, die aus Vermessungsaufgaben und der Navigation entstammten, werden sie heutzutage genutzt, um Wellen und Schwingungen zu beschreiben.

4.4.4 Die schiefe Ebene

Im Umgang mit vektoriellen physikalischen Größen dient die Sinusfunktion als Hilfsmittel, um in entsprechenden Situationen Projektionen dieser Größen zu berechnen. Beispielhaft wird diese Anwendung an der schiefen Ebene erläutert. Exemplarisch dafür steht die für den Physikunterricht schulrelevante Frage: Wie schnell rollt ein Fahrrad einen Berg hinunter? Oder präziser ausgedrückt: Mit welcher Kraft wird ein Fahrrad beschleunigt, das einen Berg hinabrollt? Zunächst erscheint es offensichtlich, dass diese Kraft von der Neigung der Ebene abhängt: je steiler der Abhang, desto schneller rollt das Rad. Doch wie genau die Kraft von der Neigung der Ebene abhängt, muss geklärt werden:

Im freien Fall wird das Fahrrad von der Gewichtskraft $\overrightarrow{F_g}$ beschleunigt. Das bedeutet, dass das Fahrrad eine Beschleunigung von 9.81 $\frac{m}{s^2}$ erfährt. An einem Abhang wird diese Kraft in zwei Komponenten aufgeteilt. Die Komponente, die parallel zur schiefen Ebene wirkt, wird als Hangabtriebskraft $\overrightarrow{F_H}$ bezeichnet, während die andere Komponente, die senkrecht auf ihr steht, Normalkraft $\overrightarrow{F_N}$ heißt. Zur Berechnung der Hangabtriebskraft wird der Vektor der Gewichtskraft auf die schiefe Ebene projiziert, wodurch ein rechtwinkliges Dreieck entsteht (vgl. Abbildung 4.31). Bei einer Neigung von α gilt damit: $\overrightarrow{F_H} = \overrightarrow{F_g} \cdot \sin(\alpha)$. Der

Faktor $\sin(\alpha)$ gibt also das Verhältnis von Hangabtriebskraft zur Gewichtskraft an und kann in diesem Kontext als Projektionsfaktor verstanden werden.

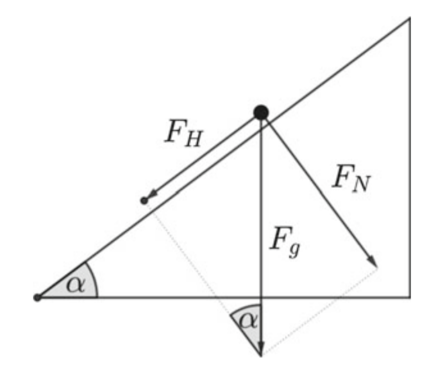


Abbildung 4.31
Projektion der Gewichtskraft auf eine schiefe Ebene

Beispiel: Die Steigung deutscher Autobahnen überschreitet selten einen Wert von 8 %. Bei dieser Steigung liegt der Neigungswinkel bei $\arctan\left(\frac{8}{100}\right) \approx 4.57°$. Der Faktor zur Berechnung der Hangabtriebskraft beträgt $\sin(4.57°) \approx 0.08$. Ein Auto, das eine solche Straße ungebremst und reibungsfrei eine Minute hinunterrollen würde, erfährt eine Beschleunigung von $0.08 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} = 0.72 \frac{m}{s^2}$ und würde damit eine Endgeschwindigkeit von $60 \cdot 0.72 \frac{m}{s} = 155.5 km/h$ erreichen, ein Wert, der wegen der Luftreibung und anderen Reibungsverlusten eher unrealistisch ist.

4.4.5 Sternenparallaxe

Wie bereits im historischen Überblick dargestellt, sind die Ursprünge der Trigonometrie zum großen Teil in der Astronomie zu verorten (vgl. Abschnitt 4.2). Die Astronomie beschäftigte sich mit der Bestimmung von Abstandsverhältnissen im Sonnensystem durch die keplerschen Gesetze, der Beschreibung der Planetenbahnen und den Auf- und Untergangszeiten der Sonne. Bei diesen Arbeiten wurden unbekannte Größen in sphärischen Dreiecken berechnet, also Dreiecken, die auf einer Kugeloberfläche liegen, woraus sich die sphärische Trigonometrie entwickelte. Seit dem 17. Jahrhundert tauchen trigonometrische Verhältnisse in der Astronomie unter anderem bei den Entfernungsmessungen mit Hilfe der Parallaxe auf. Die Parallaxe beschreibt ein optisches Phänomen, bei dem ein entfernter Gegenstand scheinbar seine Position ändert, wenn der Betrachter seine Position

ändert. Selber wahrgenommen werden kann der Effekt, wenn bei ausgestrecktem Arm der Daumen abwechselnd mit dem linken und rechten Auge betrachtet wird: der Daumen scheint zu springen. Was im kleinen Maßstab funktioniert, kann auch im großen Maßstab gemessen werden. Wird die Position eines erdnahen Sternes einmal im Sommer und einmal im Winter gemessen, so verschiebt sich dieser Stern einmal nach rechts und einmal nach links. Allerdings ist diese Verschiebung winzig, so dass die ersten Messungen dieser Art erst im 19. Jahrhundert durchgeführt werden konnten (Falcke & Römer 2020). Die Parallaxe ist ein derart wichtiges Messverfahren, dass ihr in der Astronomie eine eigene Einheit zugeordnet wurde. Ein *Parsec* ist die Entfernung eines Sternes zur Erde, bei der der mittlere Radius der Erdbahn unter einem Winkel von einer Bogensekunde erscheint (vgl. Abbildung 4.32).

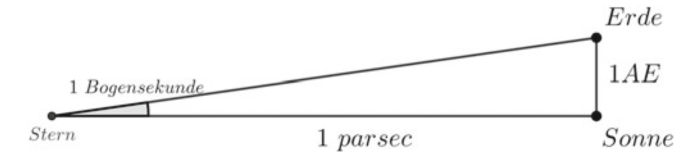


Abbildung 4.32 Parsec

Dabei entspricht eine Bogensekunde einem $\frac{1}{3600}$ eines Grades. Der Erdbahnradius bzw. der mittlere Abstand von der Erde zur Sonne entspricht einer astronomischen Einheit (AE) und beträgt etwa 149 597 870km. Damit gilt für ein Parsec:

$$1\,Parsec = \frac{149\;597\;870km}{tan\left(\frac{1°}{3600}\right)} = 3,086 * 10^{13}km$$

Das entspricht in etwa 3,26 Lichtjahren. Erstmals angewendet wurde die Parallaxe als Messgröße im Jahre 1672 von den Astronomen Giovanni Cassini und Jean Richter, als der Mars der Erde sehr nahekam. Cassini und Richter maßen die Position des Mars an zwei weit entfernten Orten auf der Erde: Paris und Französisch Guyana. Werden diese beiden Orte mit einer Geraden verbunden, kommt man auf eine Entfernung von ca. 6700 km, halbiert ergibt das $r = 3350$ km (Rodrigue 2018). Am 01. Oktober 1972 maßen die beiden Astronomen an diesen Orten eine Parallaxe von 9,5 Bogensekunden. Mithilfe des Verhältnisses zwischen Ankathete und Gegenkathete ergibt das eine Entfernung zwischen Erde und Mars

D_{EM} von:

$$D_{EM} = \frac{3350km}{\arctan(9,5'')} = 72 \cdot 10^6 km$$

Also in etwa 72 Millionen Kilometer. Weiter konnten Cassini und Richter vermittels des dritten keplerschen Gesetzes den Abstand von der Sonne zur Erde d_{Erde} bestimmen. Das dritte keplersche Gesetzt sagt aus, dass für einen Planeten P in unserem Sonnensystem das Verhältnis zwischen dem Quadrat der Umlaufzeit T_P^2 um die Sonne zur dritten Potenz der Entfernung zur Sonne d_P^3 konstant ist:

$$\frac{T_P^2}{d_P^3} = C$$

Am 01. Oktober 1672 lagen Erde, Mars und Sonne in Konjunktion, das heißt sie lagen auf einer Geraden. Daher galt für die Entfernung von Sonne zu Mars $d_{Mars} = d_{Erde} + D_{EM}$. Die Umlaufzeiten der Erde $T_{Erde} = 365,25$ und des Mars $T_{Mars} = 686,98$ waren auch bekannt. Bezeichnet q das Verhältnis von T_{Erde} zu T_{Mars}, kann aus dem dritten keplerschen Gesetz die folgende Gleichung hergeleitet werden:

$$\frac{d_{Erde}^3}{(d_{Erde} + D_{EM})^3} = q^2$$

$$d_{Erde} = \frac{\sqrt[3]{q^2}}{1 - \sqrt[3]{q^2}} \cdot D_{EM} = 137 \cdot 10^6 km$$

Verglichen mit dem heutigen Wert von $147 \cdot 10^6$ liegt der Fehler bei lediglich 7,3 %.

4.4.6 Innermathematische Anwendungskontexte

In der Geometrie werden die Sinus- und die Kosinusfunktion genutzt, um unbekannte Größen in rechtwinkligen Dreiecken zu berechnen. Weiterhin können mithilfe des Kosinussatzes Größen in beliebigen Dreiecken berechnet werden. Der Sinus spielt außerdem eine Rolle bei der Darstellung von Kurven wie

Kreisen, Ellipsen oder Epizykeln. In der Analysis und der linearen Algebra ist ein Verständnis der trigonometrischen Funktionen notwendig, um sicher mit Vektoren, Polarkoordinaten, Skalarprodukten und komplexen Zahlen umzugehen. Hinzu kommt, dass Schülerinnen und Schüler mit den trigonometrischen Funktionen zum ersten Mal einer Funktionsklasse begegnen, deren Funktionswerte nicht durch konkrete endliche Rechenvorschriften bestimmt werden können. Das hat unter anderem zur Folge, dass die inhaltliche Deutung und die Definition der trigonometrischen Funktionen eine wesentliche Bedeutung im Begriffsbildungsprozess spielen. Dadurch entstehen außerdem unterschiedliche Herangehensweisen, um charakteristische Eigenschaften wie das Kovariationsverhalten oder die Periodizität dieser Funktionen nachzuweisen bzw. zu analysieren. Dies kann Lernenden helfen zu erkennen, dass Funktionen mehr sind als eine Reihe von Rechnungen, die ausgeführt werden müssen, und ermöglicht es allgemeine funktionale Grundvorstellungen weiter auszubilden.

4.4.7 Polarkoordinaten

Ein Punkt P in der euklidischen Ebene R^2 kann auf mindestens zwei verschiedene Weisen dargestellt werden. Zum einen gibt es die Darstellung über kartesische Koordinaten $P_{kart} = (x, y)$, welche die Positionierung des Punktes relativ zu zwei gewählten orthogonalen Koordinatenachsen angeben. Zum anderen gibt es die Darstellung über Polarkoordinaten $P_{Pol} = (r, \phi)$, bei der die Position des Punktes relativ zum Koordinatenursprung und einem im Koordinatenursprung beginnenden Strahl angegeben wird. Dabei entspricht r dem Abstand zum Ursprung und wird als Radius bezeichnet und ϕ entspricht dem Winkel zum ausgezeichneten Strahl. Um von den Polarkoordinaten eines Punktes $P_{Pol} = (r, \phi)$ zu den kartesischen Koordinaten zu gelangen, werden die trigonometrischen Funktionen benötigt, denn es gilt:

$$P_{kart} = (r \cdot cos(\phi), r \cdot \sin(\phi))$$

Umgekehrt erhält man zu einem Punkt $P_{kart} = (x, y)$ die Polarkoordinaten durch:

$$P_{Pol} = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, arcos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right)$$

Polarkoordinaten haben den Vorteil, dass der Punkt in der komplexen Zahlenebene übersichtlich mithilfe der Exponentialfunktion dargestellt werden kann. Dazu wird die Darstellung $r \cdot e^{i \cdot \phi}$ gewählt. Mit der eulerschen Identität folgt:

$$r \cdot e^{i \cdot \phi} = r \cdot (\cos(\phi) + i \cdot sin(\phi))$$

Zusammenfassung: Die Darstellung wichtiger Anwendungskontexte beendet die erste Phase der didaktisch orientierten Sachanalyse. Anwendungskontexte sind von didaktischer Bedeutung, da sie den Aufbau von Grundvorstellungen fördern und dadurch die innermathematische Begriffsbildung begünstigen (vgl. Greefrath 2018). Von besonderem Interesse sind in diesem Abschnitt die Anwendungen in der Physik, da durch diese Sachzusammenhänge zwei neue Aspekte der Sinusfunktion erfahrbar werden, die in der historischen und der logischen Genese in dieser Deutlichkeit bisher noch nicht auftraten. Zum einen tritt der Projektionsgedanke der Sinusfunktion bei der Projektion von Kräften auf der schiefen Ebene auf, zum anderen wird durch die Modellierung von Schwingungsprozessen durch die Sinusfunktion die neue Klasse periodischer Prozesse mathematisch zugänglich gemacht. Die Sinusfunktion ist nun nicht mehr nur ein Werkzeug zur Berechnung unbekannter Größen in geometrischen Figuren, sondern dient auch dazu, Oszillationsvorgänge zu beschreiben, indem sie sich periodisch ändernde Zustandsgrößen mathematisch beschreibt.

Der zweite Schritt der didaktisch orientierten Sachanalyse besteht darin, die gesammelten Sachzusammenhänge den Darstellungen der Sinusfunktion zuzuordnen. Daher werden die Darstellungsformen der Sinusfunktion zu Beginn des nächsten Kapitels analysiert.

4.5 Darstellungen der Sinusfunktion

Sowohl in der historischen, der logischen und der individuellen Genese als auch bei den Anwendungskontexten treten unterschiedliche Darstellungen der Sinusfunktion auf, die an dieser Stelle zusammengefasst, geordnet und beschrieben werden. Als erste Einteilung wird zwischen dem graphischen und dem symbolisch-algebraischen Register unterschieden (vgl. Abschnitt 3.1). Zu den graphischen Darstellungen gehören zum einen geometrische Darstellungen, die den Einheitskreis und rechtwinklige Dreiecke mit einbeziehen, zum anderen gibt es die Darstellung der Sinusfunktion als Funktionsgraphen.

Geometrische Darstellungen beziehen geometrische Figuren mit ein. In diesen Fällen stehen der Einheitskreis und das rechtwinklige Dreieck nicht stellvertretend für die Funktion, vielmehr stehen der Einheitskreis und das rechtwinklige Dreieck für die mathematischen Sachzusammenhänge, die durch die Sinusfunktion rechnerisch zugänglich gemacht werden (Abbildung 4.33). Anwendungsaufgaben, bei denen Messungen und Berechnungen im Gelände vorgenommen werden oder bei denen Projektionsfiguren vorkommen, nutzen die Darstellung des Sinus am rechtwinkligen Dreieck. Diese Darstellung kann also in gewisser Weise als mathematisches Modell von Realsituationen aufgefasst werden. Genauso ist die Darstellung am Einheitskreis das mathematische Modell einer Kreisbewegung oder steht in Beziehung zu astronomischen Berechnungen am Kreis.

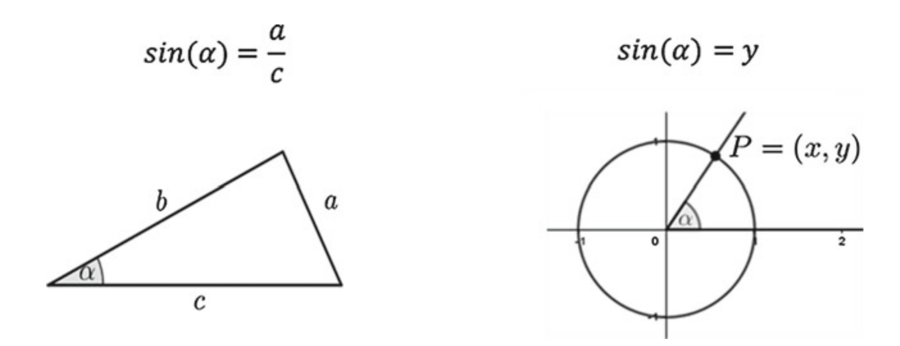


Abbildung 4.33 Sinus am rechtwinkligen Dreieck und am Einheitskreis

Anhand der Darstellung des Sinus am Einheitskreis kann der *Graph der Sinusfunktion* hergeleitet werden, an dem charakteristische Eigenschaften der Sinusfunktion abgelesen werden können (Abbildung 4.34). Ein Blick auf den Funktionsgraphen zeigt etwa die Periodizität der Funktion, Punktsymmetrien an den Stellen $k \cdot \pi$ für $k \in Z$ oder das Intervall des Wertebereichs $[-1, 1]$. Diese Darstellung steht tatsächlich stellvertretend für die Sinusfunktion. Der Unterschied zu den geometrischen Darstellungen wird bereits durch die Formulierungen „Darstellung *als* Funktionsgraph“ und „Darstellung *am* Einheitskreis“ deutlich.

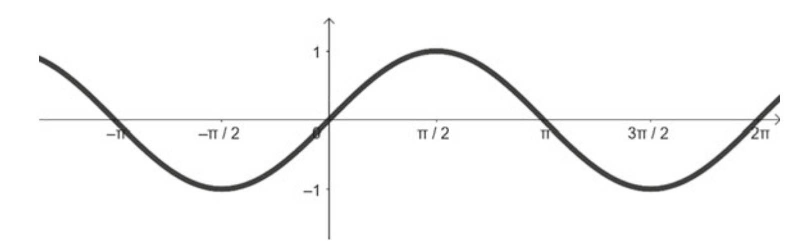


Abbildung 4.34 Graph der Sinusfunktion

Symbolische Darstellungen In der Aufarbeitung der logischen Genese der Sinusfunktion in Abschnitt 4.3 wurden Definitionen der Sinusfunktion untersucht, welche die Sinusfunktion in den entsprechenden mathematischen Teilbereichen fachlich charakterisieren. In diesen Definitionen taucht eine Reihe von symbolisch-algebraischen Darstellungen auf. Jede dieser Darstellungen legt den Fokus auf unterschiedliche Aspekte der Sinusfunktion. Die Darstellung über Potenzreihen legt das Augenmerk auf die Approximation über die Taylorentwicklung, die Produktdarstellung stellt einen Zusammenhang zur Funktionentheorie her und bei der Schwingungsdifferentialgleichung stehen physikalische Anwendungen im Mittelpunkt. In diesem Sinne wäre es denkbar jeder dieser Darstellungen eine eigene Klasse von inner- und außermathematischen Anwendungskontexten zuzuordnen und jeweils eine eigene Grundvorstellung zu formulieren. Da dieses Vorgehen nicht zielführend im Hinblick auf die Ausbildung von schulrelevanten Grundvorstellungen ist, wird an dieser Stelle lediglich ein Impuls gegeben, wie eine weitere Unterscheidung dieser Sammlung an symbolisch-algebraischen Darstellungen vorgenommen werden kann. Innerhalb dieser Menge von Darstellungen wird zwischen analytischen und funktionalen Darstellungen unterschiedenen.

Analytische Darstellungen enthalten einen Funktionsterm in expliziter geschlossener Form. In diesen Darstellungen stehen die Formeln stellvertretend für die Sinusfunktion selbst – Taylorreihe (4.4), Exponentialfunktion (4.5), Bogenlängenfunktion (4.6), Produktdarstellung (4.7):

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2k}}{(2k)!} \tag{4.4}$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{4.5}$$

$$\sin(x) = \left(\int_0^s \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)^{-1} \tag{4.6}$$

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2} \right) \tag{4.7}$$

Funktionale Darstellungen geben keinen Funktionsterm in geschlossener Form an, sondern definieren die Sinusfunktion implizit über charakteristische Eigenschaften. Diese werden in einer Funktionalgleichung zusammengefasst. Zu diesen funktionalen Darstellungen gehören die Darstellung über das Funktionalgleichungssystem (4.8), die Schwingungsdifferentialgleichung (4.9) und die Verdopplungsformel (4.10):

$$\begin{aligned} \sin x + y &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos x + y &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} &= 0; \quad \cos 0 = 1 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -f(x) \\ f(0) &= 0 f'(0) = 1 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\sin(2\pi z) = 2 \sin(\pi z) \sin\left(\pi \left(z + \frac{1}{2} \right) \right) \tag{4.10}$$

Prinzipiell eignen sich die analytischen Darstellungen dazu, konkrete Werte auszurechnen bzw. zu approximieren. Dieser Nutzen kann dementsprechend den mathematischen Kern dieser Darstellungen erfassen und Basis einer Grundvorstellung sein. Die Funktionalen Darstellungen stellen Strukturmerkmale der Sinusfunktion heraus und tragen damit dazu bei, ein algebraisches Verständnis der Sinusfunktion zu entwickeln.

Klassenbildung: Die gesammelten Darstellungen können verschiedene Klassen ähnlicher Phänomene bzw. Anwendungszusammenhänge beschreiben und dadurch unterschiedliche inhaltliche Deutungen ermöglichen. Wie bereits erwähnt, kann die Darstellung der Sinusfunktion am rechtwinkligen Dreieck dazu genutzt werden, um Anwendungsaufgaben zu lösen, in denen Vermessungen und Berechnungen im Gelände vorgenommen werden (vgl. Abschnitt 4.1). Sie kann

aber auch zur Bestimmung der Projektion von Kräften in der Physik genutzt werden. Derartige Klassen ähnlicher Sachzusammenhänge können zur normativen Entwicklung von Grundvorstellungen dienen:

> *Sie [Grundvorstellungen] beschreiben dabei keine speziellen gegenständlichen Realisierungen, sondern […] die Struktur von Gegenstandskonstellationen, die den mathematischen Kern eines Begriffes repräsentieren; somit werden jeweils Klassen von Gegenstandskonstellationen erfasst.* (vom Hofe 1995, S.93)

Diese Klassenbildung ist dabei kein Selbstzweck, sondern muss auf die kognitiven Fähigkeiten der anvisierten Lerngruppe ausgerichtet sein. Im nächsten Abschnitt werden die gesammelten Sachkontexte unterschiedlichen Darstellungsformen zugeteilt. Dazu werden vier Darstellungskategorien gebildet:

- Darstellung am rechtwinkligen Dreieck
- Darstellung am Einheitskreis
- Darstellung als Funktionsgraph
- Symbolische Darstellungen

Ordnen der Sachkontexte nach Darstellungsformen: Bevor es zur Formulierung normativer Grundvorstellungen kommt, werden weitere Schritte vorgenommen: Zuerst werden unter den relevanten mathematischen Darstellungsformen des Sinus – Dreieck, Kreis, Funktionsgraph und symbolische Darstellungen – die Sachkontexte zusammengefasst, die in der didaktischen orientierten Sachanalyse gesammelt wurden und in denen hauptsächlich mit der entsprechenden Darstellung gearbeitet wird. Im zweiten Schritt werden Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen den Sachkontexten der jeweiligen Darstellungsform herausgearbeitet und gegebenenfalls neue Unterteilungen vorgenommen. Anschließend können zu den so gewonnenen Klassen von Anwendungszusammenhängen mathematische Grundprinzipien formuliert werden, die den gemeinsamen mathematischen Kern der Sachkontexte erfassen. Daraus resultieren die normativ geprägten Grundvorstellungen, die von den Lernenden im Idealfall ausgebildet werden sollen. Zuletzt werden zu jeder Grundvorstellung Grundkenntnisse formuliert, die zu einem verständigen Umgang mit der jeweiligen Grundvorstellung beitragen und es ermöglichen ein Grundverständnis aufzubauen. Es folgt nun die Ordnung nach Darstellungsformen:

Rechtwinklige Dreiecke

- Bau der Pyramiden (vgl. Abschnitt 4.2.2)
- Indirekte Messung von Gebäuden (vgl. Abschnitt 4.2.3)

- Indirekte Messung von Abständen zwischen Sternen und Planeten (vgl. Abschnitt 4.2.4)
- Definition des Sinus am rechtwinkligen Dreieck (vgl. Abschnitt 4.3.1)
- Die schiefe Ebene (vgl. Abschnitt 4.4.4)
- Sternenparallaxe (vgl. Abschnitt 4.4.5)

Kreise

- Bestimmung der Kreissehne (vgl. Abschnitt 4.2.5)
- Erstellung von Sehnentafeln (vgl. Abschnitt 4.2.6)
- Differenzenformel zur rekursiven Berechnung von Sinuswerten (vgl. Abschnitt 4.2.8)
- Bürgis Kunstweg (vgl. Abschnitt 4.2.10)
- Definition am Einheitskreis (vgl. Abschnitt 4.3.1)
- Definition über die Umkehrfunktion der Bogenlängenfunktion des Einheitskreises (vgl. Abschnitt 4.3.1)
- Polarkoordinaten (vgl. Abschnitt 4.4.7)

Graph der Sinusfunktion

- Fourieranalyse (vgl. Abschnitt 4.4.1)
- Schwingungen und Wellen (vgl. Abschnitt 4.4.2)
- Rundfunk (vgl. Abschnitt 4.4.3)
- Periodische Funktionen (vgl. Abschnitt 4.4.6)

Symbolische Darstellung

- Definition über die Exponentialfunktion (vgl. Abschnitt 4.3.1)
- Definition über Potenzreihen (vgl. Abschnitt 4.3.1)
- Definition über die Produktdarstellung (vgl. Abschnitt 4.3.1)
- Definition über das Funktionalgleichungssystem (vgl. Abschnitt 4.3.1)
- Definition über die Schwingungsdifferentialgleichung (vgl. Abschnitt 4.3.1)

4.6 Grundvorstellungen zum Sinus

Das individuelle Verständnis des Sinusbegriffs basiert auf dem komplexen Zusammenspiel zwischen fachlichen Charakterisierungen, mathematischen Darstellungsformen und mentalen Repräsentationen. Wege der fachlichen Charakterisierung wurden bereits im Abschnitt 4.3 vorgestellt, reichen aber allein meist nicht aus, um inhaltliche Deutungen zu ermöglichen. Die Vorstellungen, die ein Individuum konstruiert, hängen maßgeblich von den Erfahrungen und dem Vorwissen ab, auf das Lernende zurückgreifen können. Komplexe mathematische Konzepte bauen in diesem Konstruktionsprozess oftmals auf bereits erlernten mathematischen Konzepten auf und beziehen mathematische Darstellungen mit ein, die als Träger bestimmter Grundvorstellungen dienen, indem sie diese im Individuum aktivieren können. Im Falle des Sinus sind diese Vorstellungsträger rechtwinklige Dreiecke, der Einheitskreis, der Graph der Sinusfunktion oder symbolische Darstellungen.

Wie bereits in Abschnitt 3.2 erwähnt, lassen sich Grundvorstellungen zu einem mathematischen Inhalt aufbauen, indem an Phänomene bzw. Sachzusammenhänge angeknüpft wird, durch die Aspekte des Begriffs erfahrbar werden. Diese Sachzusammenhänge wurden in den Abschnitten 4.1–4.4 in der didaktisch orientierten Sachanalyse gesammelt, im Abschnitt 4.5 Darstellungen zugeordnet und dienen nun als Grundlage, um auf normativer Ebene Grundvorstellungen zu formulieren. Anknüpfend an die Darstellung des Sinus am rechtwinkligen Dreieck folgt zunächst die Seitenverhältnisvorstellung und die Projektionsvorstellung, die bereits von Salle und Frohn (2017) formuliert und von Salle und Clüver (2021) in ähnlicher Weise hergeleitet wurden.

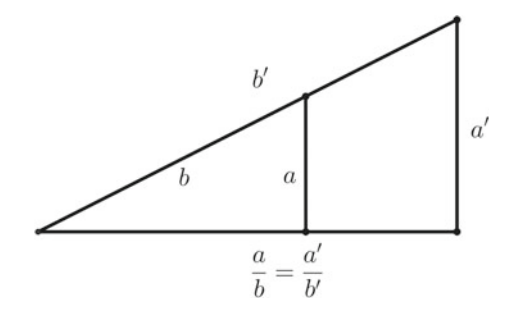
4.6.1 Die Seitenverhältnisvorstellung

Der Bau der Pyramiden (vgl. Abschnitt 4.2.2), die indirekte Messung von Gebäuden (vgl. Abschnitt 4.2.3), die indirekte Messung von Abständen zwischen Sternen und Planeten (vgl. Abschnitt 4.2.4) sowie die Sternenparallaxe (vgl. Abschnitt 4.4.5) wecken zunächst die inhaltliche Vorstellung, dass der Sinus ein Werkzeug bei Vermessungsaufgaben ist. Nimmt man die Definition des Sinus am rechtwinkligen Dreieck (vgl. Abschnitt 4.3.1) hinzu, wird deutlich, dass all diese Anwendungen auf dasselbe *Grundprinzip* zurück zu führen sind. Mathematisch ausgedrückt lässt sich dieses Prinzip wie folgt formulieren:

Entsprechende Seitenverhältnisse in zwei ähnlichen Dreiecken sind gleich.

Kennt man also das Seitenverhältnis eines Dreiecks, kennt man auch das entsprechende Seitenverhältnis aller ähnlichen Dreiecke und man kann unbekannte Größen durch das Umstellen der Verhältnisgleichung $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ einfach berechnen (vgl. Abbildung 4.35).

Abbildung 4.35
Strahlensatz Figur



Dieser Sachverhalt, der sich beispielsweise mithilfe der zentrischen Streckung erklären lässt, bildet den Ausgangspunkt der ebenen Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck. Weitergehend sind zwei rechtwinklige Dreiecke ähnlich zueinander, wenn diese sich in einem weiteren Winkel gleichen. Ein Winkel steht in diesem Fall also stellvertretend für eine ganze Klasse von ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken. Der Sinus dieses Winkels bezeichnet dann das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse. Auf dieser Grundlage lässt sich die folgende normative mathematische Grundvorstellung formulieren:

Die Seitenverhältnisvorstellung
Der Sinus zu einem Winkel α gibt das Seitenverhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse einer ganzen Klasse von ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken an.

In dieser Formulierung handelt es sich bei der Seitenverhältnisvorstellung um eine sekundäre Grundvorstellung, also eine Grundvorstellung, die Bedeutung durch das Anknüpfen an mathematische Konzepte erlangt. Bei dem Bilden des Verhältnisses zweier Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks handelt es sich um eine mathematische Operation an einem geometrischen Objekt.

Zur Seitenverhältnisvorstellung lassen sich darüber hinaus eine Reihe von mathematischen *Grundkenntnissen* formulieren (vgl. Salle & Clüver 2021):

- Der Sinus ist definiert auf dem Intervall [0°,90°].
- Die Hypotenuse ist die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck, daher ist das Verhältnis immer kleiner als 1.
- Je länger die Gegenkathete a bei gleicher Hypotenuse c ist, desto größer ist $\sin(\alpha)$.
- Je größer der Winkel α, desto größer ist $\sin(\alpha)$.

Die in dieser Arbeit gewählte Formulierung unterscheidet sich von der bei Salle und Clüver (Salle & Clüver 2021). Dort heißt es: *Seitenverhältnisvorstellung: Sinus eines Winkels als Seitenverhältnis von Gegenkathete und Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck*. In dieser Arbeit wurde diese Formulierung um den Begriff der „Ähnlichkeit" erweitert um dadurch dem invarianten Seitenverhältnis ähnlicher Dreiecke Rechnung zu tragen, das in der vorliegenden Analyse als Grundprinzip herausgestellt wurde.

4.6.2 Die Projektionsvorstellung

In der Physik wird der Sinus genutzt, um die orthogonale Projektion von vektoriellen Größen zu berechnen. Dies wird am Beispiel der schiefen Ebene (vgl. Abschnitt 4.4.4) erläutert. Der Projektionsgedanke taucht auch beim Skalarprodukt auf. Diese speziellen Anwendungskontexte geben Anlass zu der Überlegung, ob dem Sinus am rechtwinkligen Dreieck noch eine weitere Vorstellung zugeordnet werden kann. Bei genauerer Analyse der Sachzusammenhänge wird klar, dass das gleichbleibende Seitenverhältnis in ähnlichen Dreiecken zwar genutzt wird, aber nicht mehr im Vordergrund steht. Vielmehr ist es die Verkleinerung einer Strecke durch eine orthogonale Projektion, die von Interesse ist. Das Grundprinzip lautet:

> *Eine Strecke c verkleinert sich unter einer orthogonalen Projektion mit dem Winkel α gemäß der Formel* $a = \sin(\alpha) \cdot v$.

In der Gleichung $a = \sin(\alpha) \cdot v$ wird $\sin(\alpha)$ im Idealfall als Verkleinerungsfaktor aufgefasst (vgl. Abbildung 4.36). Das führt zu der Formulierung der folgenden Grundvorstellung:

> *Die Projektionsvorstellung*

Der Wert $\sin(\alpha)$ entspricht dem Faktor, um den sich eine vektorielle Größe verkleinert, die in einem Winkel von α orthogonal auf eine Gerade projiziert wird.

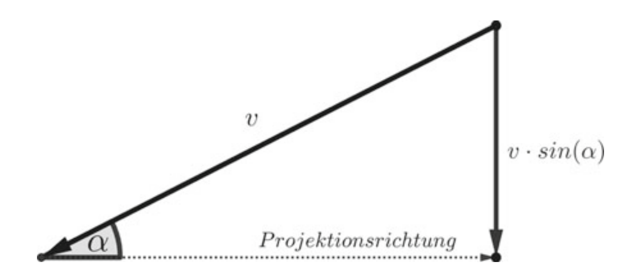


Abbildung 4.36 Projektionsfigur

Die Grundkenntnisse zur Projektionsvorstellung ähneln denen zur Seitenverhältnisvorstellung. Mit der Projektionsvorstellung lässt sich allerdings anders argumentieren:

- Die orthogonale Projektion einer vektoriellen Größe kann diese nicht vergrößern, sondern nur verkleinern. Der Faktor $\sin(\alpha)$ liegt damit im Intervall $[0, 1]$.

Auch die Projektionsvorstellung unterscheidet sich in ihrer Formulierung von der bei Salle und Clüver (2021). Dort heißt es: *Projektionsvorstellung: Sinus eines Winkels als Projektionsfaktor, der angibt, wie sich in einem rechtwinkligen Dreieck die Länge der Hypotenuse bei Projektion auf die durch die Gegenkathete festgelegte Gerade verringert.* Die Formulierung dieser Arbeit nutzt den Begriff der *vektoriellen Größe* um die sinngebenden Phänomene aus der Physik zu berücksichtigen. Des Weiteren wird auf die Nennung des *rechtwinkligen Dreiecks* verzichtet, da es sich dabei um das Ergebnis der orthogonalen Projektion handelt.

Es folgt nun eine Formulierung der Referenzdreiecksvorstellung und der Koordinatenvorstellung, die sich beide auf die Darstellung des Sinus am Einheitskreis beziehen. Es handelt sich dabei um eine Differenzierung der von Salle und Frohn (2017) formulierten Einheitskreisvorstellung. Die beiden Autoren weisen bereits darauf hin, dass die Einheitskreisvorstellung zwei Aspekte beinhaltet nämlich die Einheitskreisvorstellung mit und ohne einbeschriebenem Dreieck. Diese Unterscheidung wird im Folgenden spezifiziert.

4.6.3 Die Referenzdreiecksvorstellung

Die Sachzusammenhänge der zweiten Kategorie zeichnen ein anderes Bild des Sinus. Die Bestimmung der Kreissehne (vgl. Abschnitt 4.2.5), die Erstellung der Sehnentafeln (vgl. Abschnitt 4.2.6) und der Halbsehnensatz (vgl. Abschnitt 4.2.8) lassen darauf schließen, dass der Sinus ein Hilfsmittel zur Berechnung von Sehnen in einem Kreis ist. Das Grundprinzip, welches hinter den historischen Beispielen steckt, lässt sich wie folgt formulieren:

> *Die Länge einer Sehne in einem Kreis ist eindeutig bestimmt durch den Radius und den Mittelpunktswinkel.*

Die Konstruierbarkeit einer Kreissehne in der Geometrie führt zu der Frage, wie sich die Länge einer solchen Sehne berechnen lässt. Die Sinusfunktion liefert über Umwege eine Lösung zu diesem Problem. Die Definition des Sinus bezieht sich nämlich nicht auf die Kreissehne, sondern auf die halbe Sehne. Aus historischer Perspektive wird erst bei der Differenzenformel zur rekursiven Berechnung von Sinuswerten (vgl. Abschnitt 4.2.8) und Bürgis Kunstweg (vgl. Abschnitt 4.2.10) die Sehne des Kreises halbiert und man erkennt den Sinus in seiner heutzutage üblichen Definition.

> *Durch die Halbierung der Sehne im Einheitskreis entsteht ein rechtwinkliges Referenzdreieck.*

Auf der Grundlage dieser Sachkontexte lässt sich eine weitere Grundvorstellung zum Sinus formulieren:

> *Die Referenzdreiecksvorstellung*
> Der Sinus zum Winkel α gibt die gerichtete Länge der Gegenkathete des im Einheitskreis eingezeichneten Referenzdreiecks an.

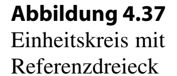
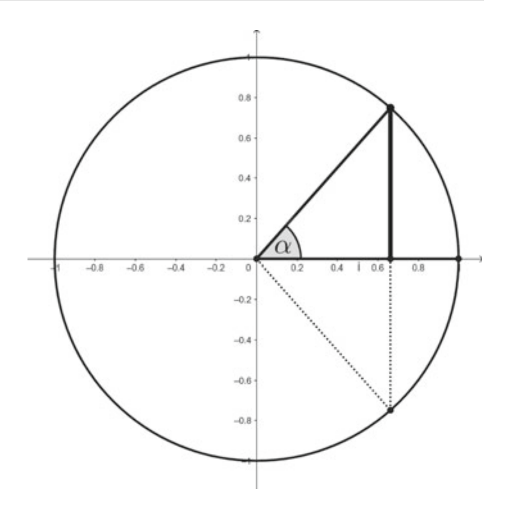


Abbildung 4.37
Einheitskreis mit
Referenzdreieck



Es handelt sich erneut um eine sekundäre Grundvorstellung. Der Sinus erhält Bedeutung durch das Berechnen der gerichteten Länge einer Seite des Referenzdreiecks (vgl. Abbildung 4.37). Auch zur Referenzdreiecksvorstellung lassen sich einige Grundkenntnisse formulieren:

- Die Hypotenuse im Referenzdreiecks hat die Länge 1, daher entspricht das Seitenverhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse genau der Länge der Gegenkathete.
- Der Sinus ist im ersten und zweiten Quadranten positiv, im dritten und vierten Quadranten negativ.
- Spiegelt man das Dreieck an der x-Achse, ändert sich das Vorzeichen.
- Spiegelt man das Dreieck an der y-Achse, bleibt das Vorzeichen gleich.

4.6.4 Die Koordinatenvorstellung

Die Definition am Einheitskreis (vgl. Abschnitt 4.3.1), die Definition über die Umkehrfunktion der Bogenlängenfunktion des Einheitskreises (vgl. Abschnitt 4.3.1) und die Anwendung der Sinusfunktion im Zusammenhang mit den Polarkoordinaten (vgl. Abschnitt 4.4.7) führen zu einer weiteren innermathematischen Vorstellung. In diesen Zusammenhängen wird die Sinusfunktion nicht

primär mit Kreissehnen in Verbindung gebracht, sondern dient dazu, gemeinsam mit der Kosinusfunktion, den Einheitskreis zu parametrisieren. Das Grundprinzip in diesen Sachzusammenhängen lässt sich wie folgt formulieren:

> *Die Sinus- und die Kosinusfunktion parametrisieren den Einheitskreis im kartesischen Koordinatensystem.* $K := \{(\cos(t), \sin(t)) | t \in R\}$.

Dieses Prinzip führt zur Koordinatenvorstellung des Sinus. Im Gegensatz zu den vorangegangenen Grundvorstellungen, die rein geometrischer Natur waren, kommen bei der Koordinatenvorstellung analytische Aspekte hinzu. Der Kreis wird in das kartesische Koordinatensystem eingebettet und der Definitionsbereich der Sinusfunktion wird auf die reellen Zahlen erweitert.

> *Die Koordinatenvorstellung*
> Der Sinus zu einem Winkel α liefert die y-Koordinate eines Punktes P, der vom Punkt $(1, 0)$ aus entlang des Einheitskreises entgegen dem Uhrzeigersinn gewandert ist und eine Strecke von α zurückgelegt hat (vgl. Abbildung 4.38).

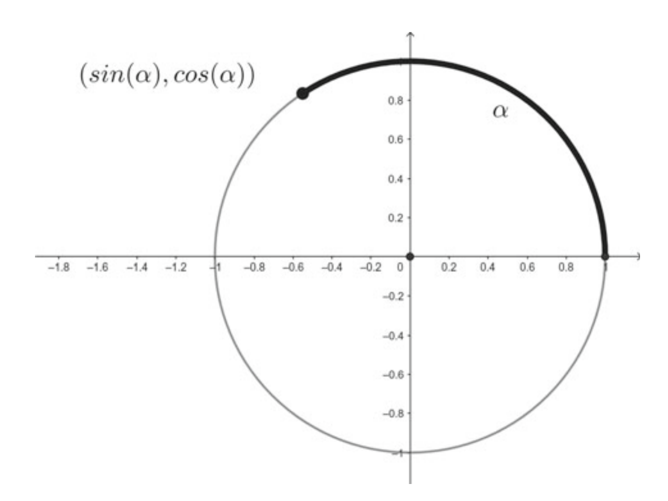


Abbildung 4.38 Parameterdarstellung des Einheitskreises

Im Zusammenhang mit der Koordinatenvorstellung werden meist Winkel im Bogenmaß angegeben, die über den Kreisbogen des Einheitskreises definiert werden. In der Schule wird die Koordinatenvorstellung dazu genutzt, um den Graphen der Sinusfunktion einzuführen und aus den Symmetrieeigenschaften des Kreises Symmetrieeigenschaften der Sinusfunktion herzuleiten. Bei den meisten schulischen Modellierungsaufgaben handelt es sich um eingekleidete Aufgaben, die wenig Anwendungsrelevanz aufweisen. Im Gegensatz zur Referenzdreiecksvorstellung zeichnet sich die Koordinatenvorstellung durch eine mathematische Klarheit aus, da auf den unhandlichen Begriff der gerichteten Längen verzichtet werden kann. Ein weiterer Vorteil gegenüber der Seitenverhältnisvorstellung liegt in der geometrischen Anschaulichkeit. Malle (2001) schreibt dazu:

> *Sinus und Kosinus sind – zumindest wie wir sie eingeführt haben – Verhältnisse. Verhältnisse lassen sich aber nicht direkt visualisieren, man muss sie vielmehr in die jeweilige Figur eindenken. Der große Vorteil des Einheitskreises liegt nun gerade darin, dass sich Sinus und Kosinus als Objekte, nämlich Punkte oder Strecken, visualisieren lassen.* (Malle 2001, S. 44)

Beispiele für Grundkenntnisse zur Koordinatenvorstellung lauten:

- Der Sinus ist definiert auf den reellen Zahlen.
- Da es sich bei dem Sinus um die y-Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis handelt, variieren die Werte in dem Intervall $[-1, 1]$.
- Der Sinus ist eine periodische Funktion.
- $\sin(x) = -\sin(x + \pi)$.

Es folgt nun eine Formulierung der Oszillationsvorstellung, die sich aus der Eigenschaft der Sinusfunktion als Modellfunktion für periodische Prozesse herleiten lässt.

4.6.5 Die Oszillationsvorstellung

Schwingungen und Wellen (vgl. Abschnitt 4.4.2) sind zentrale durch die Sinusfunktion zu beschreibende Phänomene. Zu diesen Phänomenen gehören Pendelschwingungen, Schallwellen sowie elektromagnetische Wellen, die im Rundfunk (vgl. Abschnitt 4.4.3) eine Rolle spielen. Eine übergeordnete mathematische Theorie, welche die Möglichkeit einer mathematischen Beschreibung dieser Phänomene durch trigonometrische Funktionen sicherstellt, ist die Fourieranalyse

(vgl. Abschnitt 4.4.1). Durch die Untersuchung der vorliegenden Kontexte, lässt sich im Rahmen der Sinusfunktion zusammenfassend das folgende Grundprinzip formulieren:

> *Die Sinusfunktion ist das prototypische Werkzeug zur Modellierung periodischer Prozesse.*

Ob nun der Luftdruck bei einer Schallwelle gemessen wird oder die Auslenkung eines Federpendels; in beiden Fällen eignet sich die Sinusfunktion um die sich periodisch ändernden Zustandsgrößen zu beschreiben. Auch diskrete Werte, wie die sich ändernde Dauer von Sonnenauf- zu Sonnenuntergang während eines Jahres, können mit der Sinusfunktion modelliert werden. In den einfachsten Fällen wird ein Prozess durch genau eine Sinusfunktion beschrieben, deren Amplitude und Frequenz bestimmt werden müssen. In komplizierteren Fällen wird ein periodischer Prozess durch eine Summe oder das Produkt mehrerer Sinus- und Kosinusfunktionen mit unterschiedlichen Frequenzen und Amplituden modelliert. In allen Fällen kann aus mathematischer Sicht eine Fourierreihe – eine potentiell unendliche Summe aus Sinus- und Kosinusfunktionen – gefunden werden, mit der dieser Prozess dargestellt werden kann. In der Fourieranalyse bilden die Sinus- und Kosinusfunktionen die Grundbausteine aller periodischen Funktionen und werden dadurch als prototypische periodische Funktionen etabliert. Auf der Grundlage dieser Sachzusammenhänge lässt sich die Oszillationsvorstellung der Sinusfunktion formulieren:

> *Die Oszillationsvorstellung*
> Die Funktion $\sin(\omega t)$ gibt die (normierte) Auslenkung eines sich periodisch um seine Ruhelage bewegenden Körpers zum Zeitpunkt t an. Diese Auslenkung ist im Falle eines linearen Kraftgesetzes proportional zu ihrer zweiten Ableitung: $f(t) \sim sin''(\omega t)$ (vgl. Abbildung 4.39).

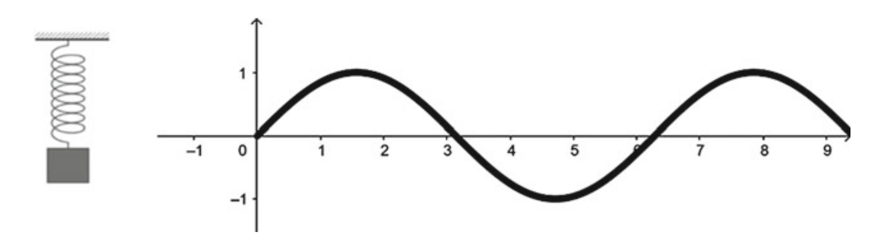


Abbildung 4.39 Ausprägung eines schwingenden Federpendels

Der Einheitskreis kann genutzt werden, um die Wellenform des Graphen der Sinusfunktion zu erklären, allerdings liegt die Stärke der Oszillationsvorstellung darin, dass sie direkt an periodische Prozesse bzw. reale Sachkontexte anknüpft und dadurch eine hohe Anwendungsrelevanz erhält. Diese Anwendungsrelevanz ist wiederum ein wichtiger Faktor bei der Sinnkonstruktion zu einem mathematischen Begriff. Grundkenntnisse zur Oszillationsvorstellung lauten wie folgt:

- Die Periodenlänge gibt an, in welchem Zeitabstand sich ein Vorgang wiederholt.
- Die Frequenz verhält sich antiproportional zur Periodenlänge.
- Die Amplitude gibt den Wert der höchsten Ausprägung einer Zustandsgröße an.
- Die Phase gibt an, in welchem Zustand ein periodischer Prozess startet.
- Bei einem Federpendel ist die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung.

Die Idee der Oszillationsvorstellung findet sich bereits bei Salle und Frohn (2017), dort werden zwar sinngebende Phänomene aufgezählt, allerdings keine konkrete Formulierung der Oszillationsvorstellung angegeben. Die Formulierung der vorliegenden Arbeit orientiert sich an den zu beschreibenden physikalischen Phänomenen, weshalb der Ausdruck „Ausprägung einer Zustandsgröße“ und die Variable t gewählt wurde.

Zuletzt werden die Zusammenhänge analysiert, in denen vorwiegend formal symbolische Darstellungen der Sinusfunktion genutzt werden. Auf dieser Grundlage wird die Funktionsvorstellung hergeleitet, die bisher noch nicht explizit formuliert wurde.

4.6.6 Die Funktionsvorstellung

Zu den Sachzusammenhängen, in denen die symbolische Darstellung der Sinusfunktion auftauchen, gehören die fachlichen Charakterisierungen, die in der logischen Genese (vgl. Abschnitt 4.3.1) zusammengetragen wurden. Im analytischen Umgang mit der Sinusfunktion lässt sich auf der Grundlage dieser Definitionen folgendes Grundprinzip erkennen:

> *Die Sinusfunktion gehört zur Funktionsklasse der periodischen Funktionen und ist als solche mit charakteristischen Eigenschaften ausgestattet.*

Die Erkundung und fachliche Darstellung dieser für die Sinusfunktion charakteristischen Eigenschaften ist ein zentrales innermathematisches Erkenntnisinteresse.

> *Die Funktionsvorstellung*
> Die Sinusfunktion $sin(x)$ ist ein mathematisches Objekt, mit dem wie mit anderen Funktionen umgegangen werden kann.

Der mathematische Umgang mit der Sinusfunktion zeigt sich zum einen in den mathematischen Operationen mit Funktionen, wie sie bei der Objektvorstellung für Funktionen in Allgemeinen ausgebildet werden (vgl. Vollrath 1989), zum anderen in der Art und Weise wie Funktionen in unterschiedlichen Teilbereichen (Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Theorie der Taylorreihen) der Mathematik analysiert werden.

Mathematische Operationen mit Funktionen, die Lernende bereits von anderen Funktionsklassen kennen, können auch bei der Sinusfunktion adaptiert werden. So kann die Manipulation der Faktoren a, b, c, d im Funktionsterm $a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ als Streckung bzw. Stauchung oder als Verschiebung des Funktionsgraphen in x- bzw. y- Richtung gedeutet werden. Die Analyse der Sinusfunktion mit Werkzeugen der Funktionentheorie führt schließlich zur Produktdarstellung und die Theorie der Taylorreihen ermöglicht eine Darstellung als Potenzreihe.

Grundkenntnisse zur Funktionsvorstellung lassen sich wie folgt formulieren:

- Der Graph der Sinusfunktion ist punktsymmetrisch.
- Die Sinusfunktion hat Maxima an den Stellen $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$ und Minima an den Stellen $\frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$.
- Die Nullstellen der Sinusfunktion liegen bei $k \cdot \pi$.
- Die Ableitung der Sinusfunktion ist die Kosinusfunktion.
- Die Sinusfunktion hat eine Amplitude von 1.
- Die Sinusfunktion hat eine Wellenlänge von 2π.
- Um eine Periodenlänge von 1 zu erhalten, muss das Argument in der Sinusfunktion durch 2π geteilt werden: $\sin\left(\frac{x}{2\pi}\right)$.

Die Formulierungen konkreter Grundvorstellungen zum Sinus markieren den Abschluss der didaktisch orientierten Sachanalyse und des Theorieteils. Auf der Grundlage dieser Aufteilung ist es Lehrenden theoretisch möglich, Schwierigkeiten bei Darstellungswechseln zu erkennen und zu erklären. Welchen Nutzen diese Grundvorstellungen in der empirischen Forschung haben, wird im nächsten Teil untersucht.

4.6.7 Ausbildung funktionsklassenspezifischer Grundvorstellungen

Bei den formulierten funktionsklassenspezifischen Grundvorstellungen zum Sinus handelt es sich um normative Kategorien, die aus inhaltlichen Überlegungen zur Genese des Begriffs entstanden sind. Sie stellen somit sachadäquate Deutungsmöglichkeiten dar, mit denen der mathematische Kern einer Klasse von Sachzusammenhängen beschrieben wird (vom Hofe 1995). Die in dieser Arbeit entwickelte didaktisch orientierte Sachanalyse, mit der diese Grundvorstellungen identifiziert wurden, entspricht im Modell von vom Hofe (1995) zur Ausbildung von Grundvorstellungen der Schritt des *inhaltlichen Bestimmens* (vgl. Abbildung 4.40).

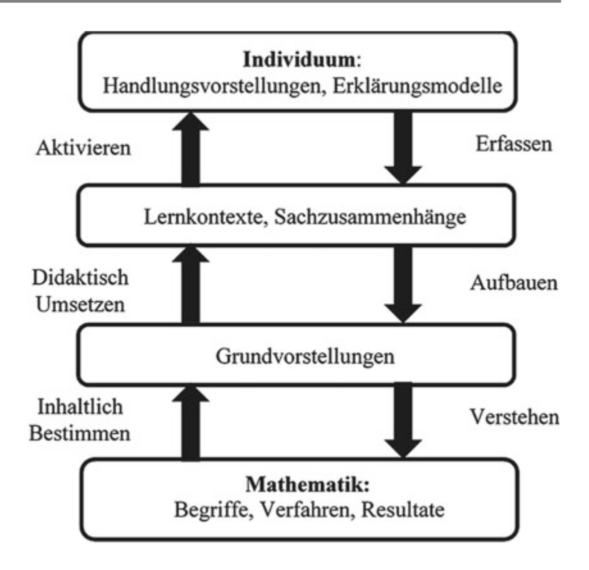


Abbildung 4.40 Modell zum Ausbilden von Grundvorstellungen (vom Hofe 1995)

In diesem Modell werden didaktische Entscheidungen des Lehrenden den kognitiven Aktivitäten der Lernenden gegenübergestellt. Nach der inhaltlichen Bestimmung werden diese Grundvorstellungen in Lernkontexten vom Lehrenden *didaktisch umgesetzt*. Dazu müssen geeignete Sachzusammenhänge ausgewählt werden, die den Kern des mathematischen Begriffs repräsentieren. Passende Aufgabenstellungen sollen schließlich Lernprozesse in Gang bringen, die im Individuum Handlungsvorstellungen und Erklärungsmodelle *aktivieren.* Auf der anderen Seite wird es den Lernenden ermöglicht, durch die wiederholte Aktivierung dieser Erfahrungsbereiche, den Kern des Sachzusammenhangs zu *erfassen* und dadurch Grundvorstellungen *aufzubauen.* Diese Grundvorstellungen dienen schließlich dazu, mathematische Begriffe inhaltlich zu deuten und damit zu *verstehen.*

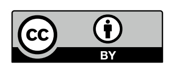
Vom Hofe (1995, S. 123 f.) betont, dass die inhaltliche Bestimmung solcher Grundvorstellungen nicht allein vom mathematischen Inhalt her erfolgen kann, sondern sich immer auch am Erfahrungshorizont der Schülerinnen und Schüler orientieren soll. Diese Orientierung an den Erfahrungen und kognitiven Fähigkeiten der Lernenden erfolgt durch didaktische Entscheidungen des Lehrenden, die im Voraus getroffen werden. Die Herleitung der Grundvorstellungen in dieser Arbeit fand mit der Fokussierung auf Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe statt. Es stellt sich also die Frage, inwieweit die aus der didaktisch orientierten

Sachanalyse formulierten Grundvorstellungen auch tatsächlich an den Wissens- und Erfahrungsstand dieser Zielgruppe anknüpfen.

Da es sich bei der ausgewählten Zielgruppe um eine sehr breite und heterogene Gruppe handelt, deren Erfahrungshorizont nur begrenzt erfasst werden kann, orientiert sich die hier entwickelte didaktisch orientierte Sachanalyse an einschlägigen schulischen Lehrwerken, in denen ein Querschnitt sinngebender Sachzusammenhänge erfasst ist (Körner 2015; Griesel et al. 2016; vom Hofe et al. 2019). Entsprechende Aufgaben wurden bereits in Abschnitt 4.1 zur aktuellen Umsetzung trigonometrischer Inhalte im mathematischen Unterricht, in Abschnitt 4.2 zur historischen Genese und in Abschnitt 4.4 zu Anwendungskontexten gesammelt. Es zeigt sich, dass die Seitenverhältnisvorstellung am rechtwinkligen Dreieck in der Sekundarstufe I in einer Reihe von Aufgaben zur Vermessung im Gelände und zur Berechnung von Größen in zwei- und dreidimensionalen geometrischen Objekten eine Rolle spielt. Die Projektionsvorstellung knüpft beispielsweise an Aufgaben zur Projektion von Kräften im Physikunterricht an, kann aber auch bei der Deutung am Einheitskreis auftauchen. Die Referenzdreiecksvorstellung und die Koordinatenvorstellung finden sich bei Aufgaben am Ende der Sekundarstufe I bzw. am Anfang der Sekundarstufe II wieder. Dabei handelt es sich um typische Modellierungsaufgaben, die an die Darstellung am Einheitskreis anknüpfen, oder um innermathematische Zusammenhänge, bei denen Symmetrieeigenschaften der Sinusfunktion am Einheitskreis gezeigt werden. Die Oszillationsvorstellung tritt bei Modellierungsaufgaben zu periodischen Prozessen in der Sekundarstufe II auf und ist insbesondere im Physikunterricht bei der Behandlung von Schwingungen und Wellen nützlich. Der Funktionsvorstellung lassen sich Aufgaben aus der Sekundarstufe II zuordnen, bei denen mit der Sinusfunktion auf symbolischer Ebene umgegangen wird. Dazu gehören beispielsweise Aufgaben in denen verkettete Funktionen abgeleitet werden. Insgesamt zeigt sich also, dass die formulierten Grundvorstellungen sich in den Schulinhalten der Sekundarstufe I und II wiederfinden lassen.

Inwieweit sich diese Grundvorstellungen tatsächlich ausbilden und als individuelle Schülervorstellungen deskriptiv erfassen lassen, bleibt darüber hinaus festzustellen. Die Ausbildung funktionsklassenspezifischer Grundvorstellungen zum Sinus hängt im obigen Modell unter anderem davon ab, ob sie sich in angemessener Weise vom Lehrenden didaktisch umsetzen lassen. Diese Umsetzung findet in Form passender Lernsituationen statt, die das Potential haben, bei den Lernenden Erfahrungsbereiche zu aktivieren (vgl. Abbildung 4.40) Bei der Frage, ob die hier identifizierten Grundvorstellungen zum Sinus geeignet sind, um entsprechende Lernsituationen zu entwickeln, die eine solche Aktivierung im Lernenden auslösen, handelt es sich um ein sehr weites Forschungsfeld,

das umfangreiche empirische Untersuchungen erfordert, die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden. Ziel dieses Forschungsvorhabens ist es daher, in einer explorativen Studie mit qualitativen Methoden zu untersuchen, inwieweit sich die Grundvorstellungen zum Sinus in den Denk- und Handlungsweisen von angehenden Lehrkräften identifizieren lassen. Lehramtsstudierende sind für die Studie besonders relevant, da es ihre berufliche Aufgabe ist, mathematische Zusammenhänge darzustellen und zu erklären. Weiterhin beruht die didaktische Umsetzung eines mathematischen Inhaltes auf inhaltlichen und methodischen Entscheidungen der Lehrkraft, die auf fachlichen und fachdidaktischen Kompetenzen zurückgehen. Zu den fachlichen Kompetenzen gehören ein flexibler Umgang mit technischen Werkzeugen der Mathematik und ein Überblick über mathematische Zusammenhänge. Zu den fachdidaktischen Kompetenzen gehört ein verständiger Umgang mit den unterschiedlichen Darstellungen, die als Träger von Grundvorstellungen dienen. Damit ist es von besonderer Bedeutung, dass die zukünftigen Lehrkräfte selbst über tragfähige Grundvorstellungen zum Sinusbegriff verfügen, um diese in angemessener Weise den Schülerinnen und Schülern zugänglich zu machen.



Check for updates

5 Konzeptioneller Rahmen der empirischen Untersuchung

In diesem Kapitel wird der empirische Teil des Forschungsvorhabens vorgestellt. Dazu werden im Folgenden zunächst die Forschungsfragen konkretisiert. Anschließend wird die Konzeption der Studie vorgestellt.

5.1 Forschungsfragen

Die in dieser Arbeit entwickelte didaktisch orientierte Sachanalyse knüpft an das genetische Prinzip zum Lehren und Lernen von Mathematik an und führt zu der Formulierung von sechs funktionsklassenspezifischen Grundvorstellungen zum Sinusbegriff. Das genetische Prinzip zeigt sich in der Unterteilung in logisch-genetische, historisch-genetische und individual-genetische Aspekte der Begriffsbildung. Die ersten beiden Aspekte können in einer theoretischen Untersuchung umfassend bestimmt werden. Der individual-genetische Aspekt lässt sich hingegen sowohl aus theoretischer als auch aus empirischer Perspektive erforschen. Die theoretische Perspektive führt zu der *normativ intendierten individuellen* Genese und lässt sich beispielsweise anhand von schultypischen Lernwegen charakterisieren, wie man sie in Schulbüchern findet. Diese Facette des individual-genetischen Aspekts wurde bereits in Abschnitt 4.1 besprochen. Eine qualitative empirische Untersuchung individueller Denkprozesse kann hingegen Einblicke in die *individuell konstruierte* Genese vermitteln. Im Rahmen des Grundvorstellungskonzepts bilden diese beiden Facetten der individuellen Genese den normativen und den deskriptiven Aspekt des didaktischen Modells ab und beschreiben damit, wie Lernende aus mathematischer Sicht Vorstellungen zum Sinus aufbauen sollen beziehungsweise wie sie tatsächlich vom Individuum konstruiert werden. Noch bevor die hier formulierten normativen Grundvorstellungen

V. Katter, *Historische, logische und individuelle Genese der Trigonometrie aus didaktischer Sicht*, Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik 10,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-41355-2_5

zum Sinus als präskriptive Kategorie in die empirische Forschung mit einbezogen werden um Denkprozesse zu erklären, stellt sich allerdings die folgende, viel allgemeinere Frage:

Forschungsfrage 1: *Welche charakteristischen Denkmuster lassen sich beim Arbeiten an ausgewählten Problemaufgaben zum Sinusbegriff erkennen?*

Ohne den Fokus auf die funktionsklassenspezifischen Grundvorstellungen zum Sinus zu legen, zielt die erste Forschungsfrage darauf ab, zu untersuchen, ob Denkmuster existieren, die mit den vorhandenen Mitteln der didaktischen Forschung rekonstruiert werden können und die übergreifend bei den Teilnehmenden zu finden sind. Die Problemaufgaben, die in dieser Studie genutzt werden, beziehen dabei unterschiedliche Darstellungen der Sinusfunktion mit ein: den Einheitskreis, rechtwinklige Dreiecke und den Funktionsgraphen. Nach der allgemeinen Untersuchung der Denkprozesse Studierender wird versucht, die konkreten Grundvorstellungen zum Sinusbegriff mithilfe qualitativer Methoden sichtbar zu machen. Dieses Vorhaben lässt sich unter der zweiten Forschungsfrage zusammenfassen:

Forschungsfrage 2: *Inwieweit lassen sich die normativen Grundvorstellungen zum Sinus in den Denkprozessen von Lehramtsstudierenden wiederfinden?*

Die letzte Forschungsfrage bezieht den konstruktiven Aspekt des Grundvorstellungskonzepts mit ein. Dazu werden die in der Theorie entwickelten Grundvorstellungen mit den empirischen Ergebnissen der ersten und zweiten Forschungsfrage abgeglichen, um mögliche Divergenzen zwischen den normativen Grundvorstellungen und den individuell konstruierten Vorstellungen zu identifizieren. Auf diese Weise können potentielle Fehlerquellen erkannt werden. Konkret lautet die Forschungsfrage:

Forschungsfrage 3: *Können mit dem Grundvorstellungskonzept Schwierigkeiten im Umgang mit dem Sinus bei Lehramtsstudierenden identifiziert bzw. erklärt werden?*

Im Einklang mit den Forschungsdesiderata 2 und 3, die in Abschnitt 2.3 der Arbeit formuliert wurden, werden diese Forschungsfragen durch die Analyse von Fallstudien untersucht, in denen Paare von Lehramtsstudierenden in kooperativen Problemlösesituationen trigonometrische Aufgaben lösen.

5.2 Konzeption der Studie

Forschungsdesign: Grundlage der Studie bilden drei Problemaufgaben, die den Sinus in der Darstellung am Einheitskreis, am rechtwinkligen Dreieck und als Modellfunktion periodischer Prozesse thematisieren. Die Aufgaben beruhen auf den unterschiedlichen Darstellungsformen des Sinus, welche als Träger bestimmter Grundvorstellungen dienen. Diese Aufgaben wurden in Partnerarbeit von den Teilnehmenden gelöst während sie mit einer Kamera über die Schulter dabei gefilmt werden. Die Studie fand in einem Raum der Universität Bielefeld statt, in dem die Probanden trotz der Videoaufzeichnungen ungestört arbeiten konnten. Die Teilnehmenden hatten insgesamt 30 Minuten Zeit für ihre Bearbeitung. Die Diskussionen, die während der Problemlöseprozesse stattfanden, wurden transkribiert und anschließend mit interpretativen Forschungsmethoden ausgewertet.

Untersuchungsgruppe: Die Untersuchungsgruppe besteht aus insgesamt 16 Mathematik-Lehramtsstudierenden für Gymnasium und Gesamtschule. Die Teilnehmenden befinden sich im 1.–2. Mastersemester. Sie haben das Gymnasium durchlaufen und Trigonometrie in der Sekundarstufe I und II behandelt. Darüber hinaus haben sie Vorlesungen zu Analysis I und II sowie Lineare Algebra I und II erfolgreich absolviert und haben kennengelernt, wie die Trigonometrie in der Hochschule behandelt wird.

Auswahl der Aufgaben für die Videostudie: Bei der Entwicklung der Aufgaben für die Videostudie wurde zunächst berücksichtigt, dass die Darstellungen des Sinus am rechtwinkligen Dreieck, am Einheitskreis und als Funktionsgraph auftauchen. Diese drei Darstellungsformen wurden ausgewählt, da sie als Träger der in Abschnitt 4.6 formulierten Grundvorstellungen zum Sinus dienen und dadurch bei den Studienteilnehmenden die gewünschten zu untersuchenden Denkprozesse aktivieren können. Weiterhin sollen die Aufgaben eine gewisse Schulnähe aufweisen. Das bedeutet, dass sie den inhaltlichen und prozessbezogenen Kompetenzerwartungen eines Lernenden entsprechen, der die gymnasiale Oberstufe abgeschlossen hat. Zuletzt sollten die Aufgaben ein Anforderungsniveau aufweisen, welches an den Wissenstand von Lehramtsstudierenden im Masterstudiengang angepasst ist. Das bedeutet, dass die Aufgaben weder trivial noch zu schwer sind, so dass Denkprozesse zu erwarten sind, über die sich die Teilnehmenden austauschen. Diese drei Kriterien bilden die Grundlage für eine Reihe von Aufgaben, die in einer Pilotstudie im Jahr 2021 an 28 Lehramtsstudierenden getestet wurde. Nach der Sichtung der Ergebnisse wurden drei Aufgaben ausgewählt. Wie es zu dieser Auswahl kam wird nun erläutert:

Unter den Aufgaben zum rechtwinkligen Dreieck stach eine Aufgabe heraus, in der am rechtwinkligen Dreieck argumentiert werden sollte, ob sich das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse bei größer werdendem Winkel vergrößert, verkleinert oder gleichbleibt. Nur knapp die Hälfte aller Studierenden gab eine korrekte Antwort und die Begründungen ließen darauf schließen, dass die Argumentation am rechtwinkligen Dreieck in diesem Kontext für viele Studierende zu Schwierigkeiten führt. In der Videostudie soll deswegen untersucht werden, wie diese Schwierigkeiten erklärt werden können und welche Rolle Grundvorstellungen beim Argumentationsprozess spielen.

Bei den Aufgaben zum Einheitskreis zeigten sich bei den Studierenden unterschiedliche Erklärungsmodelle bei der Bestimmung des Sinuswertes. Entweder wurde die gerichtete Seitenlänge des Referenzdreiecks bestimmt oder es wurde die Koordinate des Punktes auf dem Einheitskreis abgelesen. Diese beiden Vorgehensweisen entsprechen aus normativer Sicht der Koordinatenvorstellung und der Referenzdreiecksvorstellung (vgl. Abschnitt 4.6.3 und 4.6.4). Um diesen Aspekt genauer herauszuarbeiten, wurde eine Aufgabe ausgewählt, deren Lösung darin besteht, die Bestimmung der Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis mit dem Einzeichnen eines Referenzdreiecks in Zusammenhang zu bringen.

Die Aufgaben, in denen der Funktionsgraph in die Argumentation miteinbezogen wurde, thematisieren unterschiedliche Aspekte. Darunter fallen Symmetrieeigenschaften, der Zusammenhang zur Ableitungsfunktion und die Modellierung periodischer Prozesse. In einer der Aufgaben sollten die Studierenden Schülerfehler beim Modellieren einer Schwingungsbewegung diagnostizieren. Zwar konnten die Studierenden die Fehler identifizieren, allerdings gaben nur wenige eine Erklärung und keiner gab eine korrekte Modellfunktion an. Um zu untersuchen welche Schwierigkeiten bei der Modellierung eines periodischen Prozesses auftauchen können und welche Rolle die Oszillationsvorstellung spielt, wurde eine Modellierungsaufgabe entwickelt, in der der Schwingungsvorgang eines Federpendels mathematisch modelliert werden soll.

Auswertung der Videostudie: Im Hinblick auf die Forschungsfragen wurden die erhobenen Daten mit qualitativen Methoden analysiert. Das methodische Vorgehen zur Analyse der videographierten Daten orientiert sich an der Arbeitsweise von vom Hofe (1998). Dort werden Methoden der interpretativen Unterrichtsforschung mit der Analyse von Grundvorstellungen verbunden, um auf diese Weise Denkprozesse der Studierenden zu rekonstruieren. Diese Forschungsmethode bietet sich an, „wenn man sich aus deskriptiver Sicht dafür interessiert, ob Erklärungsmodelle, mit denen man Lern- bzw. Problemlösungsprozesse beschreibt, tatsächlich in den Denkprozessen der Schüler die Rolle spielen, die man aus theoretischer Sicht vermutet“ (vom Hofe 1998, S. 259).

Zur Auswertung der Videos werden die Bearbeitungsprozesse nach einer ersten Sichtung zunächst in einzelne Szenen untergliedert. Dabei wird darauf geachtet, dass in jeder dieser Szenen ein Argumentationsschritt oder ein Erklärungsmuster abgebildet ist. Anschließend werden die einzelnen Szenen transkribiert. Um die Lesbarkeit der Transkripte zu erhöhen, wird bei der Darstellung der videographierten Daten eine linearisierte Darstellung genutzt (vgl. Salle 2015). Ausgehend von den Transkripten beginnt die Interpretation der einzelnen Szenen zuerst auf der *Beschreibungsebene* und wechselt anschließend zur *Erklärungsebene*. Zu den Ebenen lassen sich die folgenden methodischen Leitfragen formulieren:

- *Deskriptives Nachzeichnen der subjektiven Schülerlogik. Welche subjektiven Vorstellungen bzw. Deutungsmodelle werden in den Lösungsversuchen der Schülerinnen deutlich? Inwieweit lassen sich dabei individuelle Denkmuster bzw. Lösungsstrategien nachzeichnen?*
- *Vergleichende Einbeziehung präskriptiver Kategorien. Inwieweit lassen sich Denkprozesse der Schülerinnen mit vorhandenen didaktischen Begriffen und Modellen erfassen und erklären? (vom Hofe 1998, S. 266)*

Diese beiden Ebenen stehen im Einklang mit den in Abschnitt 5.1 formulierten Forschungsfragen. Auf der Beschreibungsebene werden die Denkprozesse losgelöst von den Grundvorstellungen dargestellt und analysiert, um für den Sinus charakteristische Denk- und Handlungsweisen zu identifizieren. Auf der Erklärungsebene werden die Denkprozesse mithilfe von Grundvorstellungen rekonstruiert und untersucht, inwieweit sich diese im Denken der Lernenden wiederfinden. Das Grundvorstellungskonzept tritt außerdem an zwei weiteren Stellen der empirischen Untersuchung auf. Einleitend zu jeder Aufgabe wird in einer normativen Aufgabenanalyse geklärt, welche Lösungswege und Grundvorstellungen bei der Bearbeitung der jeweiligen Probleme zu erwarten sind. Abschließend zu jeder Aufgabe dienen die funktionsklassenspezifischen Grundvorstellungen dazu, Probleme im Umgang mit den unterschiedlichen Darstellungen der Sinusfunktion zu erklären.

6 Auswertung der empirischen Untersuchung

Die Studienteilnehmenden wurden über die Studie aufgeklärt und aufgefordert, alles was sie denken möglichst ausführlich zu beschreiben und viel miteinander zu kommunizieren. Anschließend wurden sie mit drei Aufgabenblättern, einem Stapel Papier, einem Federpendel und einigen Stiften im Raum allein gelassen und von hinten über die Schulter dabei gefilmt, wie sie die Aufgaben bearbeiten. Insgesamt nahmen acht zufällig zusammengestellte Paare nacheinander an den Fallstudien teil. Dabei handelte es sich stets um Masterstudierende der Mathematik für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen an der Universität Bielefeld.

6.1 Aufgabe 1: Dynamische Argumentation am rechtwinkligen Dreieck

Aufgabe 1 bezieht die Darstellung des Sinus am rechtwinkligen Dreieck ein:

Aufgabe 1

Das Dreieck ABC verändert sich, wie im Bild unten angedeutet. Dabei sei der Winkel α stets am Punkt A eingezeichnet.

Gib an, ob sich das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse vergrößert, verkleinert oder gleich bleibt.

Begründe deine Antwort. Nutze dazu die Darstellung am rechtwinkligen Dreieck.

Als visuelle Orientierungshilfe war eine Zeichnung eingefügt, in der ein rechtwinkliges Dreieck zu sehen ist, bei dem sich der Winkel α ändert und die Ankathete dieselbe Größe behält (vgl. Abbildung 6.1).

V. Katter, *Historische, logische und individuelle Genese der Trigonometrie aus didaktischer Sicht*, Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik 10,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-41355-2_6

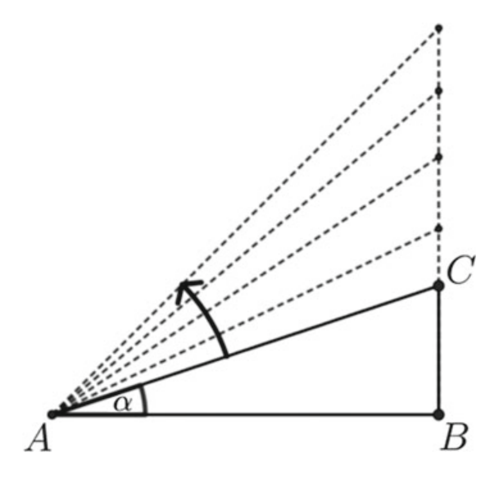


Abbildung 6.1
dynamische Prozesse am rechtwinkligen Dreieck

Die Teilnehmenden sollen mithilfe der Darstellung des Sinus am rechtwinkligen Dreieck begründen, ob das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete im Intervall $(0°, 90°)$ zunimmt, abnimmt oder gleich bleibt, wenn der entsprechende Winkel größer wird. Die Aufgabe bezieht sich also auf das Kovariationsverhalten der Sinusfunktion im Intervall $(0°, 90°)$, das auf unterschiedliche Weise begründet werden kann. Die Darstellung in Abbildung 6.1 steht im Kontrast zum sich verändernden Referenzdreieck im Einheitskreis, bei dem sich der Winkel verändert und die Länge der Hypotenuse denselben Wert behält. Im Einheitskreis ist es leicht einzusehen, dass der Sinus größer wird, da sich nur die Gegenkathete vergrößert und diese im Zähler der Verhältnisgleichung steht. Die Schwierigkeit in der vorliegenden Aufgabe liegt darin, dass sich beide Größen im gesuchten Verhältnis verändern: Sowohl Gegenkathete als auch Hypotenuse werden größer. Es ist zu erwarten, dass eine derartige dynamische Sichtweise für manche der Studierenden ungewohnt ist, da sie so in der Schule üblicherweise nicht behandelt wird. Erst durch eine genaue Betrachtung kann geschlussfolgert werden, dass diese Größen sich nicht im selben Maß verändern, sondern dass die Gegenkathete schneller wächst als die Hypotenuse.

Eine anschauliche qualitative Argumentation, die das Seitenverhältnis am rechtwinkligen Dreieck nutzt, könnte wie folgt aussehen: Für sehr kleine Winkel entspricht die Länge der Hypotenuse in etwa der Länge der Ankathete. Die Gegenkathete ist im Verhältnis zur Hypotenuse verschwindend klein. Das Verhältnis „Gegenkathete zu Hypotenuse“ ist damit annähernd 0. Für Winkel in

der Nähe von 90° werden sowohl Gegenkathete als auch Hypotenuse beliebig groß. Es ist allerdings an geeigneten Beispielen zu erkennen, dass sich die Länge der Ankathete der Länge der Hypotenuse angleicht und sich das Verhältnis von Gegenkathete zur Hypotenuse dem Wert 1 annähert. Diese Feststellung lässt darauf schließen, dass sich das gesuchte Verhältnis bei wachsendem Winkel vergrößert.

Alternativ können die Studierenden den Sachverhalt auf den Einheitskreis oder den Funktionsgraphen der Sinusfunktion übertragen. Im Falle des Einheitskreises spielt die Ähnlichkeit von Dreiecken eine wichtige Rolle: Jedem Dreieck in der Zeichnung kann ein ähnliches Dreieck zugeordnet werden, dessen Hypotenuse AC die Länge 1 besitzt. Der Eckpunkt C dieser Dreiecke liegt auf dem Einheitskreis. Bei größer werdendem Winkel α wächst die Gegenkathete BC. Daher wird das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse $BC : AC$ bei wachsendem α größer.

Sollten die Studierenden den Graphen der Sinusfunktion nutzen, um den Sachverhalt zu klären, ist zu erwarten, dass in den Argumentationsprozessen funktionale Grundvorstellungen zum Tragen kommen, die sich auf das das Kovariationsverhalten der Sinusfunktion beziehen. Die Sinusfunktion gibt im Intervall $[0°, 90°]$ den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Winkel α und dem Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse an. Die Sinusfunktion ist in diesem Intervall streng monoton wachsend, was auch am Graphen der Sinusfunktion erkennbar ist. Das gesuchte Verhältnis wird daher größer.

6.1.1 Janine und Tim – Rechtwinklige Dreiecke und Sinusfunktionen

Tim und Janine sind Studierende im 1. bzw. 2. Mastersemester. Beide studieren Mathematik auf Lehramt für die gymnasiale Oberstufe. Sie wurden aus einem Seminar zu *Grundbegriffen der Mathematikdidaktik* für diese Studie rekrutiert, kannten sich aber bereits aus anderen Veranstaltungen. Das vorliegende Transkript ist 72 Zeilen lang, wurde in zwei Szenen unterteilt und dauert 3:50 Minuten. Untersuchen wir nun, wie Tim und Janine die Aufgabe bearbeiten.

Tim und Janine – Szene 1 – Aufgabe 1

```
1  Tim:    Ich würde damit anfangen, dass wir uns angucken, wie
2          der Sinus von Alpha überhaupt definiert ist. Das ist
3          Gegenkathete durch Hypotenuse.
4  Janine: Genau, die Frage ist: bleibt die Hypotenuse gleich
5          lang oder wird die größer [zeigt auf das Dreieck]?
6          Weil also ich meine, das Ding bewegt sich ja hier
7          nicht im Kreis oder so.
8  Tim:    Richtig, die Hypotenuse wird...
9  Janine: Größer, aber…
10 Tim:    Größer.
11 Janine: Die Gegenkathete auch.
12 Tim:    Genau, aber rein jetzt erstmal vom Bild hier würd ich
13         ja sagen: offensichtlich vergrößert sich der Winkel
14         Alpha.
15 Janine: Ja Alpha vergrößert sich, genau.
16 Tim:    Ja.
17 Janine: Ah... Ah, ich weiß was du meinst, okay.
18 Tim:    Weißt du was ich meine?
19 Janine: Jaja.
20 Tim:    Also, nach dem Bild wird Alpha größer.
21 Janine: Ja.
22 Tim:    Und daraus muss folgen, dass das Verhältnis Gegenka-
23         thete durch Hypotenuse auch größer wird. Richtig?
24 Janine: Joa.
25 Tim:    Weil Sinus Alpha gleich Gegenkathete durch Hypotenuse
26         definiert ist.
27 Janine: Achso, weil du den Sinus, weil du über den Sinus
28         argumentierst und weil du irgendwie bei einem Win-
29         kel zwischen 0 und 90 Grad bist.
30 Tim:    Genau, keine Ahnung, ich mach einmal einen Win-
31         kel mit Alpha gleich 10 Grad und einmal Winkel Alpha
32         45 Grad und dann sehe ich ja offensichtlich, dass
33         sich dann da was mit verändert haben muss.
34 Janine: Also Sinus Alpha wächst monoton.
35 Tim:    Äh ja, ja monoton im Verhältnis zu Alpha. Daher
36         folgt, dass Verhältnis Gegenkathete Hypotenuse muss
37         größer werden. Oder erstmal ändert sich. So, das
38         Verhältnis muss größer werden, richtig? [lacht]
39 Janine: Eigentlich ja, ... Hoffen wir einfach mal, dass es
40         stimmt, oder dass es nicht stimmt.
41 Tim:    Gib an, ob sich das Verhältnis vergrößert verkleinert
42         oder gleich bleibt. Okay wir wissen schon mal, dass
43         es sich ändert.
```

Tim beginnt damit, sich die Definition des Sinus ins Gedächtnis zu rufen „Das ist Gegenkathete durch Hypotenuse“ (2–3). Janine stimmt ihm zu, schaut sich das Bild an und stellt die Frage, ob „die Hypotenuse gleich lang“ (4–5) bleibt oder ob „die größer“ (5) wird, denn „das Ding bewegt sich ja nicht im Kreis“ (6–7). Janine und Tim stellen beide fest, dass die Hypotenuse größer wird. Kurz darauf bemerkt Janine, dass die Gegenkathete auch größer wird und Tim erkennt, dass der Winkel sich vergrößert. Diese Feststellung lässt Janine aufhorchen: Sie ruft „Ah, ich weiß was du meinst, okay“ (17). Tim fragt „Weißt du was ich meine?“ (18) und Janine bejaht. Ohne weiter darauf einzugehen was Tim meint, folgert er, dass mit einem wachsenden Winkel α„das Verhältnis Gegenkathete durch Hypotenuse auch größer wird“ (22–23), „weil Sinus Alpha gleich Gegenkathete durch Hypotenuse definiert ist“ (35–36). Janine greift Tims Überlegung auf und sagt „Achso, weil du über den Sinus argumentierst und sagst, weil du irgendwie bei einem Winkel zwischen 0 und 90 Grad bist“ (27–29). Später ergänzt sie „Also Sinus wächst monoton“ (34). Tim antwortet darauf „Ja, monoton im Verhältnis zu Alpha. Daraus folgt Verhältnis Gegenkathete Hypotenuse muss größer werden“ (35–37). Direkt im Anschluss relativiert er seine Aussage „Oder erstmal ändert sich“ (37) und etwas später „Okay wir wissen schon mal, dass es sich ändert“ (42–43).

Fangen wir nun mit einer Interpretation dieser Szene an. In der Aufgabenstellung kommt das Wort *Sinus* nicht vor. Stattdessen wird explizit vom Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse gesprochen. Tim stellt zu Anfang einen Zusammenhang zum Sinusbegriff her und definiert diesen über das gesuchte Seitenverhältnis im rechtwinkligen Dreieck. Es lässt sich vermuten, dass die Nennung des Begriffs *Sinus* für Tim möglicherweise deswegen relevant ist, da er dadurch an ein ihm bekanntes Konzept anknüpfen kann. Dieses Konzept beinhaltet nicht nur die geometrische Definition, die er nennt, sondern stellt auch Bezüge zu funktionalen Vorstellungen her. Besonders relevant ist in diesem Zusammenhang die Kovariationsvorstellung, die sich bei der Sinusfunktion in der folgenden Eigenschaft wiederfindet: Für größer werdende α im Intervall $[0°, 90°]$ wächst auch $sin(\alpha)$.

Dieser funktionale Zusammenhang zeigt sich bei Tim in der Aussage „Ja, monoton im Verhältnis zu α. Daher folgt, das Verhältnis Gegenkathete zu Hypotenuse muss größer werden“ (35–36). Die Monotonie der Sinusfunktion auf dem Intervall $[0°, 90°]$ fasst das oben genannte Kovariationsverhalten in einem Begriff zusammen und scheint in Tims Begründungsprozess die tragende Vorstellung und das entscheidende Argument zu sein.

Janine versucht zu Beginn das rechtwinklige Dreieck in ihre Argumentation miteinzubeziehen. Dazu vergleicht sie die Skizze mit der ihr vertrauten Situation am Einheitskreis. Sie erinnert sich möglicherweise daran, dass die Länge der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks am Einheitskreis konstant 1 bleibt. Darum stellt sie die Frage, ob die Hypotenuse sich in dem vorliegenden Fall verändert oder nicht. Nachdem die Frage geklärt ist, nimmt sie Abstand von der Skizze und versucht Tims Gedankengang nachzuvollziehen. Ihre Aussage „Ach so, weil du über den Sinus argumentierst" (27–28) lässt vermuten, dass sich hier ein Bedeutungswechsel bei Janine vollzieht. Es wird nicht mehr nach einem Argument am rechtwinkligen Dreieck gesucht, sondern ein Argument am Sinus. Damit meint Janine höchstwahrscheinlich die Sinusfunktion, wodurch sie nun in der Lage ist, Eigenschaften der Sinusfunktion in ihre Argumentation miteinzubeziehen. Dies äußerst sich in dem Satz „Also Sinus Alpha wächst monoton" (34). Janine scheint nicht überzeugt von dem Argument, was sich in ihrer Aussage „Hoffen wir einfach mal das es stimmt" (39–40) bemerkbar macht. Möglicherweise hängt dies damit zusammen, dass sie keine direkte Verbindung zwischen dem Seitenverhältnis in einem rechtwinkligen Dreieck und den funktionalen Eigenschaften der Sinusfunktion herstellen kann. Schauen wir nun, wie sich die Situation weiterentwickelt.

Tim und Janine – Szene 2 – Aufgabe 1

```
44 Tim:    Also, wir wissen offensichtlich, Alpha wird größer,
45         das heißt Sinus von Alpha wird größer.
46 Janine: Oder…
47 Tim:    Also, dass das größer wird ist klar, wenn du dir ein-
48         mal versuchst so 10° und 45° vorzustellen [macht
49         einen Winkel mit seiner Hand und einem Stift] wenn
50         ich nur das eine verschiebe, muss dieser Winkel
51         größer werden [deutet auf die Gegenkathete].
52 Janine: [liest den Aufgabentext vor] Versuche wenn möglich
53         noch weitere Argumente zu finden.
54 Tim:    Es gibt halt mehrere Möglichkeiten das zu argumentie-
55         ren. Das ist ja jetzt hier erstmal nur eine.
56         Das ist ja quasi am Bild argumentieren das wir sagen:
57         okay wir stellen uns ein Dreieck vor [formt ein
58         Dreieck mit beiden Händen] wenn wir uns das Dreieck
59         vorstellen dann ändert sich da offensichtlich was
60         bei. So...also nochmal. Wir haben, Gegenkathete zu
61         Hypotenuse ändert sich. Wir wissen, dass Gegenkathete
62         durch Hypotenuse größer werden muss. Richtig?
```

```
63 Janine: Joa.
64 Tim:    Was sagt das über das Verhältnis aus?
65 Janine: Häää? Das ist das Verhältnis von Gegenkathete zu Hy-
66         potenuse.
67 Tim:    Lol. Ich hab Verhältnis noch mit 2 zu 3 aber das ist
68         ja...
69 Janine: Aber das kannst du auch darstellen als Bruch.
70 Tim:    Ja deswegen.
71 Janine: Okay, haben wir noch weitere Argumente?
72 Tim:    Puh... ich hab gerade keins.
```

Tim nutzt sein Wissen über die Sinusfunktion „Wir wissen offensichtlich, Alpha wird größer, das heißt Sinus Alpha wird größer" (44–45). Janine fängt einen Satz an, aber unterbricht sich sofort. Daraufhin erklärt Tim, warum „das größer wird" (47), und zieht dazu zwei Dreiecke mit Winkelgrößen 10° und 45° hinzu: Diese Dreiecke versucht er mit seinen Händen und einem Stift zu visualisieren. Janine gibt sich mit der bisherigen Antwort noch nicht zufrieden und wiederholt die Aufgabenstellung „Versuche, wenn möglich noch weitere Argumente zu finden" (52–53). Tim sagt, dass es mehrere Möglichkeiten gibt, den Sachverhalt zu erklären und dass sie bisher „quasi am Bild argumentieren" (56). Tim startet einen neuen Erklärungsversuch und beginnt mit dem, was die beiden wissen, nämlich dass „Gegenkathete durch Hypotenuse größer werden muss" (61–62). Daraufhin fragt er „Was sagt das über das Verhältnis aus" (64). Janine ist überrascht und sagt „Häää? Das ist das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse" (65–66). Tim erwidert darauf „Lol. Ich hab das Verhältnis noch mit 2 zu 3, aber das ist ja…" (67–68). Janine unterbricht ihn „aber das kannst du auch darstellen als Bruch" (69). Daraufhin zeigt sich Tim einsichtig. Sie überlegen beide, ob ihnen noch weitere Argumente einfallen, finden aber keine.

Überlegen wir nun wie diese Szene interpretiert werden kann. Tim geht erneut auf das Kovariationsverhalten der Sinusfunktion ein und wiederholt, dass $\sin(\alpha)$ wächst, wenn α im Intervall $[0°, 90°]$ wächst. Dabei stellt er keinen direkten Bezug zum rechtwinkligen Dreieck her. Er behauptet zwar am Bild zu argumentieren, liefert aber keine Argumente, die diese Behauptung stützen. Seine Argumentation bleibt daher ergebnislos. Zum Ende der Diskussion startet Tim einen neuen Versuch: Er weiß, dass „Gegenkathete durch Hypotenuse größer werden muss" (61–62), und stellt direkt im Anschluss die Frage, was das über das Verhältnis aussagt. Nachdem er von Janine darauf hingewiesen wird, dass es dasselbe ist, lenkt er ein und sagt „Ich hab das Verhältnis noch mit 2 zu 3" (67). Es scheint als gäbe es für Tim an diesem Punkt drei Konzepte, die er nicht miteinander in Verbindung setzen kann:

1. $\sin(\alpha)$ als Wert einer Funktion
2. $\sin(\alpha)$ als Ergebnis einer Division: „Gegenkathete durch Hypotenuse“
3. $\sin(\alpha)$ als Verhältnis: „2 zu 3“ bzw. 2:3

Welche Erklärung lässt sich für diesen kognitiven Konflikt finden? Das Kovariationsverhalten der Sinusfunktion kann in der Darstellung des Sinus am rechtwinkligen Dreieck, am Einheitskreis und am Funktionsgraphen erläutert werden. Der Einheitskreis wird zwar von Janine kurz genannt, spielt aber in dieser Szene eine untergeordnete Rolle. Am Funktionsgraphen lässt sich das Kovariationsverhalten im Intervall $[0°, 90°]$ regelrecht ablesen. Auf dieser Darstellungsebene zeigt sich Tim zuversichtlich, dass das Verhältnis größer werden muss. Am rechtwinkligen Dreieck müssen hingegen passende Begründungen gefunden werden. Tims Argumentation bezieht sich hauptsächlich auf die Darstellung der Sinusfunktion als Funktionsgraph, der Wechsel zum Dreieck gelingt nur begrenzt. Tim versucht zwar mit Gesten und Beispielen den funktionalen Zusammenhang am rechtwinkligen Dreieck zu erläutern, findet aber keine zufriedenstellende Begründung. Dass bei Tim am Ende der Szene unterschiedliche Konzepte des Sinus zu erkennen sind, die in einem scheinbaren Konflikt stehen, hängt möglicherweise mit den unterschiedlichen Darstellungsebenen zusammen, auf denen er nach geeigneten Argumenten sucht. Diese Darstellungsebenen stehen für ihn in keinem direkten Zusammenhang. Diese Zusammenhangslosigkeit überträgt sich für ihn auch auf die drei oben genannten Konzepte. Das Tim darüber keinen Zusammenhang zwischen dem *Sinus als Verhältnis* und dem *Sinus als Ergebnis einer Division* erkennen kann, hängt möglicherweise mit einem schwach ausgebildeten Grundverständnis zum Bruchzahlbegriff zusammen.

6.1.2 Max und David – Grenzwertprozesse am rechtwinkligen Dreieck

Max und David sind Mathematik-Lehramtsstudierende der gymnasialen Oberstufe, sie befinden sich im 3. Mastersemester. Sie kennen sich aus dem Kurs *Grundbegriffe der Mathematikdidaktik,* aus dem sie für diese Fallstudie rekrutiert wurden. Nach einer kurzen Einführung beginnen sie mit Aufgabe 1. Das Transkript umfasst 191 Zeilen, ist in vier Szenen untergliedert und dauert 8:45 Minuten. Nachdem der Aufgabentext vorgelesen wurde, beginnt die folgende Szene.

Max und David – Szene 1 – Aufgabe 1

1	**Max:**	Wir sollen also Gegenkathete zu Hypotenuse, wir sol-
2		len also…
3	**David:**	Kosinus.
4	**Max:**	Naja. Sinus.
5	**David:**	Ne, ja Sinus, Blödsinn. Ja, Blödsinn. Also Kosinus.
6		Und...
7	**Max:**	Der Witz ist ja, dass wir diese Länge geteilt durch
8		diese Länge haben. Die wird hier größer [zeigt auf
9		die Gegenkathete] und hier die definitiv auch größer
10		[zeigt auf die Hypotenuse]. Das heißt, wir können ja
11		erstmal überlegen, wie wir uns das ausrechnen können,
12		obwohl wir uns das...
13	**David:**	Also man verlängert ja quasi diese Strecke [zeigt auf
14		die Gegenkathete] nur um ein kleines Teilstück ne,
15		also... War das nicht irgendwie dieses mit Additions-
16		theo..., irgendwas mit Additionen hatten wir doch
17		auch im Seminar. Warte, sind das hier Schmierzettel?
18		Das sind Schmierzettel.
19	**Max:**	Ich hoffe, er nimmt es nicht persönlich, wenn wir
20		nicht die Sachen aus dem Seminar nutzen.
21	**David:**	Ja, ich habe es halt jetzt nicht im Kopf, ne ähm.
22		Warte mal. [fängt an ein Dreieck zu zeichnen] Oh das
23		ist ein blauer Stift. So das ist jetzt ein bisschen
24		kleiner, aber einmal hier dieses Stück [zeichnet
25		das rechtwinklige Dreieck aus der Skizze nach]. So
26		das heißt, ich mach es mal klassisch: a, b die
27		Katheten und c die Hypotenuse. Dann haben wir hier
28		vielleicht c Strich, und das ist b Strich, So! Das
29		heißt, das Ding ist: b plus b Strich. Also haben
30		wir... Das ist jetzt erst nur so ein bisschen Kritze-
31		leien.
32	**Max:**	Jaja, ich weiß, man fängt einmal an und guckt wo man
33		rauskommt.
34	**David:**	C Quadrat gleich b plus b Strich. Äh...

Max und David beginnen damit, das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse zu benennen. David vertut sich und nennt das Verhältnis „Kosinus“ (3). Max berichtigt ihn „Naja, Sinus“ (4). David gibt ihm Recht, nutzt anschließend aber trotzdem dem Begriff Kosinus. Diese Verwechslung behält David bei. Max schildert daraufhin den Sachverhalt und dessen Problematik. Beide Seiten in dem gesuchten Verhältnis vergrößern sich. Es ist also nicht unmittelbar ersichtlich, ob sich der Quotient vergrößert, verkleinert oder gleichbleibt. Er schlägt vor,

sich dem Problem quantitativ zu nähern „Wir können erstmal überlegen, wie wir uns das ausrechnen können“ (10–11). David fängt an, die Skizze genauer zu betrachten und überlegt, welche Werkzeuge zur Berechnung der Seitenverhältnisse genutzt werden können, und nennt die Additionstheoreme, führt den Gedanken allerdings nicht zu Ende. Er beginnt eine Skizze anzufertigen, bezeichnet die Seiten im Ausgangsdreieck mit a, b und c, den Zuwachs der Gegenkathete mit b‘ und die neue Hypotenuse mit c‘. Am Schluss dieser Szene formuliert er die Gleichung „c Quadrat gleich b plus b‘“ (34).

Wie kann diese Szene interpretiert werden? Sowohl David als auch Max suchen nach einer Antwort auf die Frage, ob sich das Verhältnis vergrößert, verkleinert oder gleichbleibt. Sie äußern keine Vermutung bezüglich der Lösung, also ist davon auszugehen, dass ihnen die Antwort zu diesem Zeitpunkt noch nicht bekannt ist. Sie erkennen allerdings die Problematik, dass sich im gesuchten Quotienten sowohl der Nenner als auch der Zähler vergrößern. Um das Änderungsverhalten zu bestimmen, versuchen sie zu *rechnen.* David exploriert den Sachverhalt zeichnerisch und algebraisch, indem er unbekannte Größen in den Dreiecken mit Variablen bezeichnet und Gleichungen aufstellt. Die Gleichung, die David nennt (34), lässt vermuten, dass er versucht, den Satz des Pythagoras zu Rate zu ziehen. Dieser führt nicht zu einer Antwort auf die Fragestellung. Entscheidend ist in dieser Szene der Wechsel von der geometrischen zur algebraischen Darstellungsebene. David und Max orientieren sich zunächst am rechtwinkligen Dreieck. Dort beschriften sie die Seiten der Dreiecke und versuchen das Problem mathematisch zu modellieren. Dazu wechseln sie ins algebraische Register und untersuchen den Sachverhalt rechnerisch.

Max und David – Szene 2 – Aufgabe 1

```
 [Zeile 35-39 des Transkripts wurden ausgelassen]
40 David:  [...] Ähm...
41         So, keine Ahnung, ob uns das jetzt was weiterbringt
42         und hier ist jetzt der Winkel Alpha [zeigt auf die
43         Zeichnung]. Und der wird jetzt vergrößert. Das heißt,
44         wir vergrößern den Winkel Alpha. Das heißt, der Wert
45         für den Kosinus wird auch größer. Wenn das Argument
46         des Kosinus größer wird, wird ja auch ... Der Kosinus
47         an sich größer.
48 Max:    Gilt das nicht nur für den Einheitskreis? Ich
49         meine...
```

```
50 David:  Die Funktion Kosinus in welchem Wertebe...? [schreibt
51         den Ausdruck „cos(x)=“ auf Papier] Also wenn wir Ko-
52         sinus von x, in welchem Bereich bewegt sich das von 0
53         bis 1, oder nicht?
54 Max:    Mhm.
55 David:  Also das einmal von 0[schreibt die Zahlen 0 und 1
56         auf das Blatt Papier]. Vollkommen mathematisch inkor-
57         rekt, aber ist auch egal. Also 0 bis 1. Das heißt,
58         wenn wir hier jetzt irgendwie einen Wert zwischen 0
59         und 1 haben, irgendwie so was wie ... 0,2 ... sei mal
60         dahin gestellt.
61 Max:    Er würde sich ja von 0 bis 1 bewegen. Wenn wir hier
62         von dem am Einheitskreis bis 90 gehen.
63 David:  Bis 90 Grad.
64 Max:    Aber das hier ist ja nicht der Einheitskreis. Wir ge-
65         hen ja nicht in einem Kreis entlang sondern wir gehen
66         hier nach oben. Das wissen wir.
67 David:  Ja, aber. Also ja, gut. Du gibst ja... warte im Ko-
68         sinus selber gibst du doch immer, als Argument...
69 Max:    Aber wir waren immer noch beim Sinus oder. Irgend
70         wie...
71 David:  Ach...ja, Gegenkathete ist Sinus. Blödsinn ja warum
72         bring ich das denn durcheinander. So Sinus ist aber
73         trotzdem 0 bis 1.
```

David stellt zu Beginn der Szene die Frage, ob sein Vorgehen ihn „weiterbringt“ (41). Er hält sodann fest, dass sich der Winkel α in dem gegebenen Dreieck vergrößert und damit der *Kosinus* größer wird, und gibt die folgende Begründung an: „Wenn das Argument des Kosinus größer wird, wird ja auch… der Kosinus an sich größer“ (45–47). Max stellt die Frage, ob „das nicht nur für den Einheitskreis“ (48) gilt. David unterbricht Max, stellt ihm die Frage, in welchem Wertebereich die „Funktion Kosinus“ (50) sich bewegt, und gibt ihm gleichzeitig die Antwort „von 0 bis 1, oder nicht?“ (52). Max stimmt ihm zu. Daran anschließend versucht David mit dem Wertebereich der *Kosinusfunktion* zu argumentieren, kommt aber zu keinem Schluss. Max wirft erneut ein, dass sich die Werte nur im Bereich „von 0 bis 1 bewegen, wenn wir hier von dem am Einheitskreis bis 90 gehen“ (61–62). Er bemerkt allerdings erneut: „Das hier ist ja nicht der Einheitskreis. Wir gehen ja nicht in einem Kreis entlang, sondern wir gehen hier nach oben.“ (64–66). David schafft es nicht, Max Problem aus dem Weg zu räumen. Am Ende der Szene weist Max David darauf hin, dass er nach wie vor fälschlicherweise den Begriff Kosinus statt Sinus verwendet.

In dieser Szene treffen bei Max und David verschiedene Erklärungsmodelle aufeinander, mit denen sie versuchen, das Kovariationsverhalten der Sinusfunktion zu erklären. Zu Beginn der Szene argumentiert David noch am rechtwinkligen Dreieck und zeigt auf das ihm vorliegende Bild. Kurz darauf formuliert David allerdings die folgende Begründung: „Wenn das Argument des Kosinus größer wird, wird ja auch … Der Kosinus größer" (45–46). An dieser Stelle kann davon ausgegangen werden, dass sich David auf den Funktionsgraphen bezieht, da er die Begriffe „Wert des Kosinus" im Zusammenhang mit „Argumenten" nutzt. Später spricht er explizit von der „Funktion Kosinus" (50) und versucht den Wertebereich in seine Argumentation miteinzubeziehen. Seine Vermutung zum Kovariationsverhalten der „Kosinusfunktion" scheint für David auf dieser Ebene gesichert zu sein. Max scheint mit dieser Argumentation unzufrieden zu sein. Er weigert sich Davids Begründung anzuerkennen, denn „das hier ist ja nicht der Einheitskreis" (64). Dieser Aussage nach zu urteilen beschreibt die Sinusfunktion für Max zunächst den ganz konkreten funktionalen Zusammenhang zwischen Bogenlänge und y-Koordinate am Einheitskreis und nicht etwa den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Winkel α und dem Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse in einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck.

Nachdem Max und David vier Minuten lang versuchen, den Sachverhalt algebraisch mithilfe des Pythagoras zu erklären, ereignet sich die folgende Szene:

Max und David – Szene 3 – Aufgabe 1

```
[In den Zeilen 74-128 des Transkriptes, versuchen Max und David
das Problem mithilfe des Satzes von Pythagoras zu lösen]
129 Max:   Hä, ist der, ist der ganze Witz nicht daran, dass
130        wir das vielleicht gar nicht brauchen. Ich meine...
131        Wir haben schlussendlich, haben wir, müssen wir das
132        Verhältnis Gegenkathete zu Hypotenuse haben, ja? Und
133        wenn das hier unendlich groß wird [zeigt auf die Ge-
134        genkathete des Dreiecks] kommen wir unendlich nah an
135        90 Grad dran. Und der Sinus von Null...
136 David: Naja, nee guck mal: wenn ich das jetzt hier bis
137        hierhin... [zeichnet einen Punkt oberhalb der Gegen-
138        kathete ein und verbindet diesen mit dem Ursprung]
139 Max:   Ja.
140 David: Naja gut, okay.
141 Max:   Wir kommen unendlich nah an 90 Grad dran. Und da wir
142        wissen, dass der Sinus von...
143 David: Ja, aber es geht doch gerade nach oben. Also...
144 Max:   Ja, trotzdem.
```

```
145 David: Hab ich jetzt einen Knick in der Optik? Warte wenn...
146 Max:   Guck mal.
147 David: Das wird jetzt komplett blöd.
148 Max:   Guck mal: Der Punkt geht immer weiter nach oben, im-
149        mer weiter nach oben, immer weiter nach oben.
150 David: Wenn du den Winkel änderst okay. Aber das A. Das ver-
151        läuft ja quasi hier hoch.
152 Max:   Ja, es ist. Es geht ja.
153 David: Wir kommen ja nie bei 90 Grad an...
154 Max:   Ja, das mein ich ja. Das ist quasi der schöne
155        Grenzwert. 90 Grad ist unser Grenzwert. Also wenn wir
156        quasi das Ding hier so hinhalten Richtung Valentins
157        Büro, dann haben wir hier so ein 98 äh 89 Komma neun
158        neun neun gradigen Winkel und dann müssen wir diese a
159        und b Verhältnisse gar nicht ausrechnen. Wir wissen,
160        dass der Sinus von 0 bis 90 von 0 auf 1 hoch geht und
161        dementsprechend wird das Verhältnis immer grö-
162        ßer, also immer erhöhen, je höher a wird. Also je
163        größer a wird, desto näher kommt der dieses Verhält-
164        nis, also für uns einfach der Sinus, Richtung 1 und
165        dementsprechend wird sich das vergrößern.
166 David: Ja, also Ich verstehe schon, was du meinst.
```

Max beginnt die Szene mit einer neuen Idee „Ist der ganze Witz nicht daran, dass wir das gar nicht brauchen?“ (129–130) und verweist damit auf die zuvor durchgeführten Rechnungen, bei denen der Satz des Pythagoras genutzt wurde. Er versucht sich dem Sachverhalt nun qualitativ zu nähern. Max verschiebt in Gedanken den Punkt A auf der Gegenkathete immer weiter nach oben und sagt „Und wenn das jetzt hier unendlich groß wird, kommen wir unendlich nah an 90 Grad dran“ (132–135). David unterbricht Max und stellt seine Behauptung in Frage und versucht ein Gegenbeispiel zu liefern „Naja, nee guck mal: wenn ich das jetzt hier bis hierhin…“ (136–137). Nach einer kurzen Überlegung lenkt er ein „Naja gut“ (140). Es zeigt sich allerdings, dass er den Grenzwertprozess trotzdem nicht nachvollziehen kann „Ja, aber es geht doch gerade nach oben.“ (143) und „Wir kommen ja nie bei 90 Grad an“ (153). Max erklärt David, dass der Winkel Alpha 90 Grad nie erreicht, da es „der schöne Grenzwert“ (154–155) ist, und veranschaulicht ihm den Vorgang. David stimmt Max daraufhin vorerst zu.

In dieser Szene wird das Kovariationsverhalten der Sinusfunktion erstmals mit der Darstellung am rechtwinkligen Dreieck in Verbindung gebracht und von

einer vorwiegend quantitativen Argumentationsebene zu einer qualitativen Argumentationsebene gewechselt. Max nutzt dazu die Darstellung am rechtwinkligen Dreieck und versucht diese in Einklang mit seinem Wissen über die Sinusfunktion zu bringen. Er betrachtet dazu was passiert, wenn die Gegenkathete vergrößert wird. Er folgert, dass sich dadurch der Winkel α dem Wert von 90° annähert. In Verbindung mit dem Wissen über die Sinusfunktion, die auf dem Intervall $[0^\circ, 90^\circ]$ monoton wächst, kommt er zu dem Schluss, dass sich das gesuchte Verhältnis vergrößern muss. David hat Probleme, sich den Sachverhalt vorzustellen. Eine Problematik rührt daher, dass er zwischen zwei Prozessen unterscheidet: 1. Der Winkel α wird größer und 2. die Gegenkathete wird größer. Im ersten Fall kann David verstehen, dass sich α dem Wert 90° annähert. Im zweiten Fall kann er nicht erkennen, wie sich das Verhältnis verändert: „Wenn du den Winkel änderst okay. Aber das A das verläuft ja quasi hier hoch" (150–151). Ein Grund dafür könnte sein, dass eine gleichmäßige Vergrößerung des Winkels zu einer immer schneller werdenden Vergrößerung der Gegenkathete führt, wohingegen eine gleichmäßige Vergrößerung der Gegenkathete zu einer immer langsameren Vergrößerung des Winkels führt. Das Erreichen des Wertes von 90 Grad erscheint dadurch immer unwahrscheinlicher. Aus der qualitativen Betrachtung des Prozesses am rechtwinkligen Dreieck folgert Max, dass sich der Winkel α vergrößert und dem Wert 90 Grad annähert. Die Dynamik des Vorgehens erlaubt es Max, das Kovariationsverhalten der Sinusfunktion am rechtwinkligen Dreieck zu begründen.

Max und David – Szene 4 – Aufgabe 1

```
167 Max:   [umkreist das Wort vergrößern im Aufgabentext] Das
168        müssen wir ankreuzen und dann müssen wir den Rest gar
169        nicht ausrechnen...Vergrößert und dann schreiben wir
170 David: Ja aber es vergrößert sich doch beides, es vergrößert
171        sich ja sowohl die Gegenkathete als auch die Hy-
172        potenuse.
173 Max:   Das ist, das ist für uns egal.
174 David: Das heißt, bleibt es nicht im Endeffekt gleich?
175 Max:   Das...
176 David: Also...
177 Max:   Das bleibt nicht gleich, weil wenn es gleich bleiben
178        würde, müsste ja der Winkel Alpha gleichbleiben.
179 David: Stimmt, ja.
```

```
180 Max:   Und wenn wir uns einfach die... Deswegen würde ich es
181        komplett über das Alpha argumentieren: dass wir sagen
182        hier das Verhältnis, was hier gefragt ist, ist eben
183        unser Sinus und den Wert, den Alpha für uns annehmen
184        kann, ist, wenn das A hier ganz unten ist 0 Grad
185        und wenn es ganz oben ist, geht es Richtung 90
186        Grad und das heißt, äh, je größer A wird, desto mehr
187        gehen wir an den Grenzwert 1 und dann haben wir diese
188        erste Aufgabe eigentlich durch.
189 David: Jetzt verstehe ich auch deinen Ansatz.
190 Max:   Bäm [hebt die Faust zu einem Fistbumb] negativ getes-
191        tete Faust. [beide lachen]
```

Zu Beginn dieser Szene macht Max einen Lösungsvorschlag zur Aufgabe. Er zeigt auf das Wort „vergrößern" und sagt „Das müssen wir ankreuzen und dann müssen wir den Rest gar nicht ausrechnen" (167–168). David überkommen erneut Zweifel an der Lösung, er argumentiert „Ja aber es vergrößert sich doch beides" (170–171). „Das heißt, bleibt es nicht im Endeffekt gleich?" (174). Max erwidert „Das bleibt nicht gleich, weil wenn es gleichbleiben würde, müsste ja der Winkel Alpha gleichbleiben." (177–178). Schließlich schlägt Max vor „komplett über das Alpha" (181) zu argumentieren. Er erklärt, dass das wonach gesucht ist, „eben unser Sinus" (183) ist und dieser läuft in dem vorliegenden Beispiel von 0 bis 1. David stimmt zu und sagt, dass er Max Ansatz nun versteht.

Max verwendet seine in der vorigen Szene etablierte Verbindung zwischen dem rechtwinkligen Dreieck und der Sinusfunktion, um die Aufgabe zu lösen. Dazu nutzt er seine Grundkenntnisse über den Sinus als Funktion (Monotonie auf dem Intervall [0,90°]) und adaptiert diese auf den vorliegenden Fall. Bei David konfligieren erneut die zwei Erklärungsmodelle an der Sinusfunktion und am rechtwinkligen Dreieck: Er kann zwar die Argumentation an der Sinusfunktion verstehen, da er diese bereits in der zweiten Szene selbst angeführt hat, hat aber Probleme sie mit der Darstellung am rechtwinkligen Dreieck abzustimmen. Max bemerkt scheinbar Davids Schwierigkeit das Kovariationsverhalten der Sinusfunktion am rechtwinkligen Dreieck zu begründen und beschränkt sich darauf, die funktionalen Eigenschaften des Sinus zu wiederholen.

6.1.3 Zusammenfassung – Aufgabe 1

In den beiden untersuchten Bearbeitungsprozessen können zentrale Schwierigkeiten im Umgang mit Prozessen an rechtwinkligen Dreiecken herausgearbeitet

werden. Es zeigt sich in beiden Fallstudien zu Beginn bei den Studierenden eine *schwache bis fehlende Vernetzung der Interpretation des Sinus am rechtwinkligen Dreieck und als Funktion.* Kernproblematik der vorliegenden Aufgabe liegt darin, das Kovariationsverhalten der Sinusfunktion auf unterschiedlichen Darstellungsebenen zu begründen. Die Kovariationsvorstellung zählt zu den allgemeinen Grundvorstellungen zu Funktionen und wird von den Studierenden zum Beispiel genutzt, wenn diese darauf verweisen, dass die Sinusfunktion auf dem Intervall $[0°, 90°]$ monoton wächst. Diese Aussage allein würde bei entsprechender Vernetzung der Darstellungsebenen des Sinus am rechtwinkligen Dreieck, am Einheitskreis und als Funktionsgraph dazu reichen, um eine korrekte Antwort auf die in der Aufgabenstellung formulierten Fragen zu geben. Es zeigt sich allerdings in beiden Fallstudien, dass den Studierenden die Monotonie der Sinusfunktion allein nicht als Begründung ausreicht. Es fehlt die Überzeugungskraft des Arguments, da es nicht eigenständig aus der vorgegebenen Darstellung am rechtwinkligen Dreieck und der damit verbundenen Seitenverhältnisvorstellung hergeleitet wird (vgl. Abschnitt 4.6.1). Vielmehr beziehen sich die Argumentationsprozesse der Studierenden zu Beginn hauptsächlich auf die Funktionsvorstellung des Sinus (vgl. Abschnitt 4.6.6).

Die fehlende Verknüpfung zwischen der Seitenverhältnisvorstellung und der Funktionsvorstellung des Sinus lässt sich wie folgt erklären: Der Lernweg vom rechtwinkligen Dreieck zur Sinusfunktion verläuft über den Einheitskreis. Der Einheitskreis bildet in diesem Sinne das Bindeglied zwischen den zwei unterschiedlichen Darstellungen und Grundvorstellungen. Eigenschaften, die für die Sinusfunktion gelten, können in einem Schritt auf die Darstellung am Einheitskreis übertragen werden. Die Übertragung von Eigenschaften der Sinusfunktion auf die Darstellung am rechtwinkligen Dreieck benötigt bereits zwei Übersetzungsprozesse und erweist sich für die Studierenden als problematisch. Die Studierenden müssen auf die Transitivität der hergestellten Zusammenhänge vertrauen. Besonders eindrücklich zeigt sich diese fehlende Transitivität bei Max. Er ist zunächst unzufrieden mit dem Argument, dass die Sinusfunktion monoton wächst, da mit ihr lediglich die funktionale Abhängigkeit zwischen Bogenmaß und y-Koordinate am Einheitskreis beschrieben wird. Um wirklich überzeugt zu sein, beginnt er das Kovariationsverhalten am rechtwinkligen Dreieck zu erkunden. Erst danach ist die Aufgabe für ihn gelöst. Im Fall von Janine und Tim gelingt die Deutung des Kovariationsverhaltens am rechtwinkligen Dreieck nur eingeschränkt. Sie bleiben schließlich dabei, Grundwissen im Zusammenhang mit der Funktionsvorstellung zu nutzen. An diesem Beispiel zeigt sich, wie wichtig es ist, die allgemeinen funktionalen Grundvorstellungen zu erweitern und spezielle, auf die Funktionsklassen abgestimmte Grundvorstellungen zu entwickeln.

6.2 Aufgabe 2: Das Referenzdreieck im Einheitskreis

Der Aufgabentext der zweiten Aufgabe lautet:

Erkläre, warum der innere Kreis die y-Achse bei $y = sin(\alpha)$ schneidet (vgl. Abbildung 6.2).

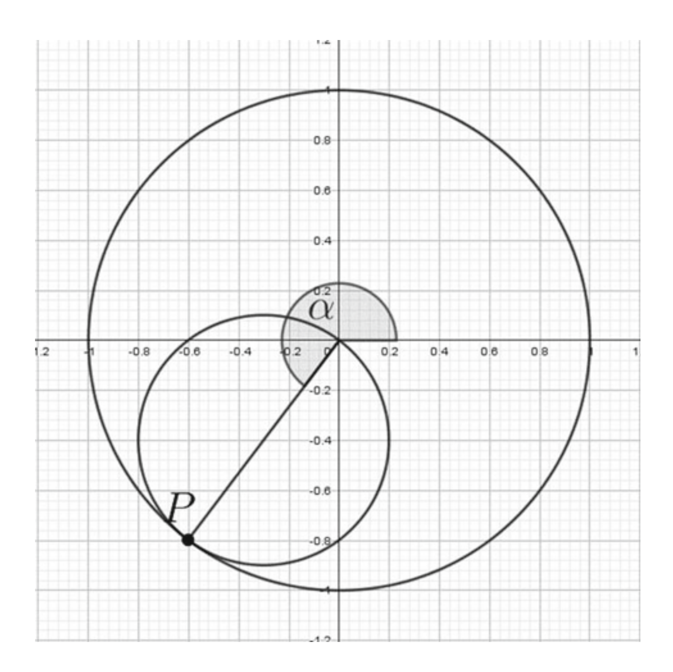


Abbildung 6.2 Sinus am Einheitskreis ohne eingezeichnetes Referenzdreieck

In dieser Aufgabe sind die Studierenden mit einem Problem konfrontiert, in dem mit der Definition des Sinus als y-Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis gearbeitet werden soll, ohne dass das zugehörige Referenzdreieck mit eingezeichnet ist. Ihnen wird eine Zeichnung ausgehändigt, in der ein Punkt P im dritten Quadranten auf dem Einheitskreis zu sehen ist. Zudem ist der Winkel α eingezeichnet, den der Punkt auf dem Einheitskreis ausgehend von $(1, 0)$ zurückgelegt hat. Der Punkt P und der Ursprung des Koordinatensystems bilden die Endpunkte einer Strecke, die wiederum den Durchmesser eines kleineren Kreises bildet. Dieser Kreis schneidet die x- und y-Achse im Nullpunkt und an jeweils einer weiteren Stelle. Die Studierenden sind nun damit beauftragt zu erklären, warum der Schnittpunkt des inneren Kreises mit der y-Achse gleich dem Sinus von α ist.

Um dies zu zeigen, kann wie folgt argumentiert werden: Nach der Definition des Sinus am Einheitskreis entspricht der Sinus von α der y-Koordinate des Punktes P. Es muss also gezeigt werden, dass der Schnittpunkt des kleinen Kreises mit der y-Achse gleich der y-Koordinate des Punkt P ist. Das ist genau dann der Fall, wenn der Schnittpunkt gleich der Projektion von P auf die y-Achse ist oder, in anderen Worten, wenn die Verbindungsstrecke zwischen P und dem Schnittpunkt auf der y-Achse rechtwinklig auf der y-Achse steht. Wird diese Strecke ins Koordinatensystem eingezeichnet entsteht ein Dreieck in einem Halbkreis, dessen längste Seite der Durchmesser des Halbkreises ist. Es handelt sich bei dieser Konstellation um den Thaleskreis, womit das Dreieck rechtwinklig ist und damit das Problem gelöst wurde.

Der Satz des Thales gehört wie der Satz des Pythagoras zu den geometrischen Grundwerkzeugen, die in der Schule vermittelt werden, und sollte damit den Studierenden bekannt sein. Doch auch wenn der Satz des Thales nicht zum Repertoire der Studierenden gehören sollte, so lässt sich aus den Problemlöseprozessen und der Art und Weise, wie im Zusammenhang mit dieser Aufgabe über Aspekte des Sinus diskutiert wird, vieles über mögliche Schwierigkeiten der Studierenden erfahren. Das fehlende Referenzdreieck in der Abbildung der Aufgabe drängt den Lernenden dazu, sich von der ursprünglichen Interpretation des Sinus am rechtwinkligen Dreieck zu lösen und die Interpretation als y-Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis voran zu stellen. Hierdurch soll ein Perspektivwechsel erreicht werden. Das Einzeichnen eines Referenzdreiecks bedarf in diesem Fall einer Rechtfertigung.

Statt die y-Koordinate des Punktes P auf dem Einheitskreis zu betrachten, könnten die Studierenden alternativ auch über die gerichtete Länge des eingezeichneten Referenzdreiecks argumentieren. Um die Länge zu bestimmen, müsste die Gerade auf die y-Achse projiziert werden.

Funktion dieser Aufgabe ist es, das Zusammenspiel der Seitenverhältnisvorstellung, der Referenzdreiecksvorstellung und der Koordinatenvorstellung genauer zu untersuchen. Bei einer aktiven Auseinandersetzung mit den drei Interpretationen können die Hürden deutlich gemacht werden, die sich bei einem solchen Deutungswechsel in den Weg stellen. Von entscheidender Bedeutung beim Lösen dieser Aufgabe ist die funktionale Grundvorstellung der Zuordnung. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage: Welche Wertepaare werden durch die Sinusfunktion gebildet beziehungsweise wie lassen sich das Argument und der Funktionswert inhaltlich deuten? Am rechtwinkligen Dreieck ordnet die Sinusfunktion einem Winkel in Gradmaß ein Seitenverhältnis zu. Am Einheitskreis wird einem Winkel oder die Länge eines Bogenstücks die Länge einer Seite im Referenzdreieck beziehungsweise die y-Koordinate eines Punktes zugeordnet. In der Darstellung als Funktionsgraph wird einem Wert auf der x-Achse ein Wert auf der y-Achse zugeordnet.

6.2.1 Janine und Tim – Hürden beim Deutungswechsel vom Dreieck zum Einheitskreis

Das vorliegende Transkript ist 93 Zeilen lang und ist untergliedert in drei Szenen. Die Bearbeitung der Aufgabe dauert insgesamt 19 Minuten. Dabei liefert das Transkript einen detailreichen Einblick in die Denkprozesse, die beim Übergang zwischen Dreieck und Einheitskreis stattfinden. Verfolgen wir nun Janine und Tim beim Bearbeiten dieser Aufgabe.

Janine und Tim – Szene 1– Aufgabe 2

1 **Janine:** Also der Sinus...
2 **Tim:** Ich würde halt immer mit dem Einfachsten erst anfan-
3 gen: was ist wenn Alpha gleich null ist.
4 **Janine:** Naja aber der Sinus ist der y... der der ... die y
5 Koordinate des Punktes...
5 **Tim:** Im Einheitskreis.
6 **Janine:** Auf dem Einheitskreis und das ist der Einheitskreis.
7 **Tim:** Ja, genau.
8 **Janine:** So und hier hätten wir jetzt, wenn der Punkt hier ist
9 [zeigt auf den Punkt P im 3. Quadranten] würdest du
10 das Dreieck jetzt praktisch hier zeichnen [deutet
11 eine Line vom Punkt P zur x-Achse an] Ach nee das ist
12 Quatsch. Der Winkel ist größer als...aber das macht
13 ja gar nichts weil du ja trotzdem dann einfach
14 praktisch diesen Teil nehmen kannst [zeigt auf das
15 Alpha].
14 **Tim:** Richtig.
15 **Janine:** Und dann hättest du den Sinus hier als, äh, warte was
16 ist denn der Winkel? Dann das ist der Winkel Gegenka-
17 thete, hä, irgendwas passt da grade nicht. Moment.
18 **Tim:** Wieso? Du hast Hypotenuse als Länge 1, du hast hier
19 deine Gegenkathete und du hast hier deinen Winkel Al-
20 pha.
21 **Janine:** Ach das ist in der mit der y-Achse, oh, nicht mit der
22 x-Achse. Ich dachte gerade der Schnittpunkt des Krei-
23 ses mit der x-Achse und ich dachte mir die ganze
24 Zeit, das passt doch nicht.

Direkt nachdem die Studierenden die Aufgabenstellung gelesen haben, startet Janine das Gespräch „Also der Sinus…“ (1) und wird von Tim unterbrochen. Tim versucht die Problemstellung der Aufgabe auf den „einfachsten“ (2) Fall zurückzuführen und überlegt „was ist, wenn Alpha gleich null ist“ (2–3). Janine wirft ein, dass der Sinus „die y-Koordinate des Punktes“ (4–5) im Einheitskreis ist, und bezieht sich auf die Definition des Sinus am Einheitskreis. Janine und Tim stimmen sich gegenseitig zu. Sie geht nicht weiter auf Tims Versuch ein, Alpha gleich null zu setzen, und kehrt zur ursprünglichen Problemstellung zurück. Sie zeigt auf den Punkt im dritten Quadranten und überlegt, was passiert, wenn man „das Dreieck jetzt praktisch da einzeichnen“ (9–10) würde. Dazu deutet sie mit dem Stift eine Line vom Punkt P zur x-Achse an. Sie zieht ihren Vorschlag kurz zurück, „weil der Winkel größer als…“ (12) ist und unterbricht ihren Satz, um dann im selben Atemzug wieder umzuschwenken, „weil du ja trotzdem dann einfach praktisch diesen Teil nehmen kannst“ (13–14). Dabei deutet sie auf den Teil des Winkels $\alpha - 180°$. Janine versucht nun die Definition des Sinus am rechtwinkligen Dreieck anzuwenden und sucht vergeblich die Gegenkathete des von ihr vorgestellten Dreiecks bis sie schließlich bemerkt, dass irgendetwas gerade nicht passt. Tim zeigt daraufhin auf den Radius des Einheitskreises: „Du hast hier die Hypotenuse als Länge 1“ (18), auf die imaginierte Verbindungsstrecke zwischen P und der x-Achse: „hier deine Gegenkathete“ (19) und schließlich auf den Referenzwinkel des vorgestellten Dreiecks: „und du hast hier deinen Winkel Alpha“ (19–20). Janine ruft laut „Ach das ist in der mit der y-Achse, nicht mit der x-Achse“ (21) und erkennt, dass sie fälschlicherweise dachte, der Sinus sei gleich dem „Schnittpunkt des Kreises mit der x-Achse“ (20–21).

Tim beginnt die Szene damit, sich anzuschauen welchen konkreten Wert die Sinusfunktion dem Argument $\alpha = 0$ zuordnet. Janine startet mit einer inhaltlichen Deutung des Sinus als y-Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis. Im Verlauf ihrer Bearbeitung versucht sie jedoch, den Sinus auf das Seitenverhältnis in einem rechtwinkligen Dreieck zurückzuführen, was zu Problemen führt. Dabei trifft sie in ihrem Deutungsprozess auf Hürden, die bei dem Wechsel vom rechtwinkligen Dreieck zum Einheitskreis typisch sind. Nämlich:

1. die Erweiterung des Definitionsbereiches
2. das Bestimmen der Länge eines Seitenstückes durch die Projektion auf die entsprechende Achse

Wie lassen sich diese Schwierigkeiten erklären? Die Erweiterung des Definitionsbereiches ergibt sich aus der Betrachtung des Einheitskreises. Im Falle des rechtwinkligen Dreiecks ordnet die Sinusfunktion einem Winkel α das Verhältnis

zweier Seiten zu. Da die Innenwinkelsumme in einem Dreieck 180° beträgt, kann dieser Winkel nicht größer als 90° werden. Am Einheitskreis nimmt die Sinusfunktion hingegen Drehwinkel als Argumente, die sowohl positiv als auch negativ und beliebig groß werden können. Je nachdem, welche Zuordnungsvorstellung des Sinus Janine verwendet, erhält sie unterschiedliche Definitionsbereiche.

Im Umgang mit dem Referenzdreieck bemerkt Janine plötzlich, dass irgendetwas da gerade nicht passt (17). Schließlich sagt sie aus, dass sie fälschlicherweise den Schnittpunkt mit der x-Achse betrachtet hat und nicht den mit der y-Achse. Wie konnte es dazu kommen? Das Einzeichnen eines Dreiecks in den Einheitskreis kann unterschiedliche Funktionen erfüllen. Zum einen kann es im ersten Quadranten als Referenzdreieck dienen, das den Zusammenhang zwischen der Definition am rechtwinkligen Dreieck und der Definition des Sinus am Einheitskreis herstellt. In anderen Quadranten ist dieses Referenzdreieck problematisch, da dort die gerichteten Längen betrachtet werden müssen. Zum anderen entsteht ein weiteres Dreieck, wenn man den Punkt P auf die y-Achse projiziert um die y-Koordinate abzulesen (vgl. Abbildung 6.3). In Janines Fall scheint es, als hätte sie die Seite des Referenzdreiecks mit der Projektionslinie verwechselt.

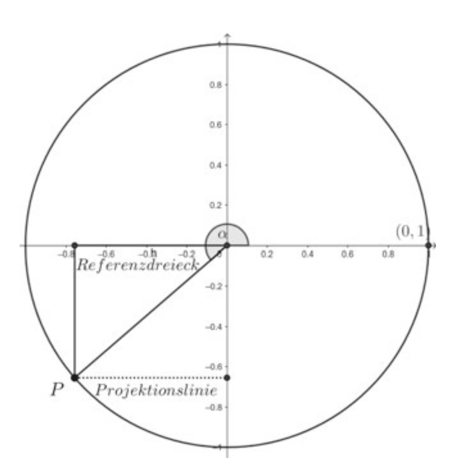


Abbildung 6.3 Einheitskreis mit Referenzdreieck und Projektionslinie

Anschließend an diese Szene beginnt Tim einen Winkel in den ersten Quadranten zu zeichnen. Von dort aus will er mit Symmetrieeigenschaften des Kreises und ähnlichen Dreiecken das Problem lösen. Nach ca. fünf Minuten ereignet sich der folgende Austausch:

Janine und Tim – Szene 2 – Aufgabe 2

```
[Zeile 25-44 wurden ausgelassen]
45 Janine: Ich meine, warum ist denn, also dass da unten Sinus
46         Alpha ist, ist klar [zeigt auf den Schnittpunkt mit
47         der y-Achse]. Die Frage ist, warum gerade bei dem
48         inneren Kreis, also warum kann der Kreis nicht anders
49         aussehen. Also ich hoffe das ist die Frage.
50 Tim:    Magst du einmal für uns erklären, warum du jetzt Sin-
51         nus Alpha da unten hast?
52 Janine: Äh, warum das da unten Sinus Alpha ist? Ähm...Weil
53         du, also, du kannst es nicht mehr. Also denn wenn
54         Alpha größer wird als 90 Grad wirds schwierig, das
55         über ähm...
56 Tim:    Kannst ruhig versuchen den da oben den Kreis...
57 Janine: Ja, aber es ist ja wurscht, also du hast irgendwann
58         Alpha zwischen 0 und 90 Grad festgestellt, dass der
59         Sinus immer die y-Koordinate ist und das überträgst
60         du auch auf Alpha die größer sind als 90 Grad.
```

Nachdem Tim einige Zeit damit verbracht hat, den Sinus im ersten Quadranten zu erörtern, geht Janine zurück zur Ausgangssituation und sagt, „dass da unten Sinus Alpha ist, ist klar“ (45–46). Woraufhin Tim Janine fragt, „warum du jetzt Sinus Alpha da unten klar hast“ (50–51). Janine gibt ihm eine Antwort, indem sie zunächst das Problem der Erweiterung des Definitionsbereiches anspricht. „Also wenn Alpha größer wird als 90 Grad wird das schwierig über ähm“ (53–55). Anschließend erklärt sie, wie der verallgemeinernde Schritt auf Winkelgrößen über 90° vonstattengeht: „Also du hast irgendwann Alpha zwischen 0 und 90 Grad festgestellt, dass der Sinus immer die y-Koordinate ist und das überträgst du auch auf Alpha die größer sind als 90 Grad“ (57–60).

Janine ist der Lösung zu Beginn der Szene schon sehr nahe (45–49). Sie müsste nur noch den Satz von Thales anwenden und entsprechend geometrisch argumentieren: Der Kreis kann nicht anders aussehen. Es handelt sich um den Thaleskreis, da das Referenzdreieck rechtwinklig ist. Bevor sie ihren Gedanken zu Ende führen kann, stellt Tim ihr die Frage, „warum du jetzt Sinus Alpha da unten hast?“ (50–51). Sie erklärt ihm, wie sich die Zuordnungsvorschrift des Sinus vom rechtwinkligen Dreieck zum Einheitskreis ändert. Zentral ist bei ihr die Feststellung, dass im Intervall $[0°, 90°]$ der Sinus nicht nur dem Seitenverhältnis im rechtwinkligen Dreieck entspricht, sondern „der Sinus immer die y-Koordinate ist“ (59) und dieser Zusammenhang schließlich auf Winkel übertragen wird, die

größer als 90° sind. Damit knüpft sie an die Problematik der vorherigen Szene an.

Eine Minute später versuchen sie das Problem erneut durch die Betrachtung von Spezialfällen zu lösen.

Janine und Tim – Szene 3 – Aufgabe 2

```
61 Janine: Okay, vielleicht sollten wir uns einen Spezialfall
62         angucken. Also wenn P zum Beispiel da unten ist.
63         Oder meinetwegen Alpha 0 Grad ist, dann hätten
64         wir...
65 Tim:    Hier unser P. [Zeigt auf den Punkt (1,0)]
66 Janine: Genau, da unser P, der Kreis wäre genau so, [deutet
67         einen Kreis an] hier würde diese Gerade durchgehen
68         [zeigt auf die x-Achse] also der Durchmesser prak-
69         tisch des kleinen Kreises.
70 Tim:    Und da wäre der Schnittpunkt offensichtlich. [zeigt
71         auf den Ursprung]
72 Janine: Und der Sinus wäre natürlich 0, weil wir auch in die-
73         sem Kreis kein Dreieck mit einer Strecke... also
74         mit einer Gegenkathete haben.
75 Tim:    Ja.
76 Janine: So.
77 Tim:    Hilft uns also nicht.
78 Janine: Nein aber...
79 Tim:    Nein. So, nächster Spezialfall: da wäre ja Alpha 90
80         Grad.
81 Janine: Genau. Dann haben wir...die Gegenkathete [zeigt auf
82         die Gegenkathete des eingezeichneten Dreiecks] wäre
83         ja die komplette, diese [zeigt auf die y-Achse] komp-
84         lette Strecke eben im kleinen Kreis. Das wäre genau
85         der Durchmesser [unverständlich]. Wollte schon sa-
86         gen... aber ist wurscht. Wo ist dann eigentlich
87         die Hypotenuse?
88 Tim:    Mhhh...
89 Janine: Achso, ja. Die ist auch 1. Also wir haben eigentlich
90         kein Dreieck, aber gut.
91 Tim:    Genau, wir haben in dem Moment halt auch kein Drei-
92         eck. Nutzt also auch nichts.
```

Janine und Tim haben bereits ca. 15 Minuten lang vergeblich versucht, das vorliegende Problem zu lösen. Dabei haben sie in dem Koordinatensystem Hilfslinien und ein Dreieck in den ersten Quadranten gezeichnet, um sich den Sachverhalt besser vorstellen zu können. Janine beginnt in diesem Abschnitt erneut mit dem Versuch, sich Spezialfälle anzuschauen. Sie betrachtet den Fall, in dem Alpha

gleich Null ist und P die Koordinaten $(1, 0)$ hat. Janine erkennt, dass in diesem Fall der Durchmesser des kleinen Kreises genau auf der x-Achse liegen würde. Tim zeigt auf den Ursprung und bemerkt, dass dort auch ein „offensichtlicher" (70) Schnittpunkt läge. Janine ergänzt „der Sinus wäre natürlich 0" (72) und begründet ihre Aussage damit, dass es in diesem Fall „kein Dreieck mit der Strecke…also mit einer Gegenkathete" (73–74) gibt. Da es in diesem Fall kein Dreieck gibt, kann Tim nicht viel mit diesem Beispiel anfangen „Es hilft uns also nicht" (77). Er drängt zum nächsten Spezialfall und schlägt vor, sich anzuschauen was passiert, wenn Alpha gleich 90 Grad ist. Janine macht in diesem Fall für die Gegenkathete folgende Feststellung: „die komplette, diese komplette Strecke eben im kleinen Kreis das wäre genau der Durchmesser" (83–84). Anschließend fragt sie sich „Wo ist dann eigentlich die Hypotenuse?" (86–87) und beantwortet die Frage selbst „Achso, ja. Die ist auch 1. Also wir haben eigentlich kein Dreieck, aber gut." (89–90) Woraufhin Tim erneut anmerkt, dass es ohne Dreieck nichts nützt sich den Spezialfall anzuschauen.

In dieser Szene wird deutlich, zu welchen Problemen eine nicht tragfähige Zuordnungsvorstellung beim Sinus führen kann. Janine und Tim versuchen das Problem zu lösen, indem sie es auf bekannte Spezialfälle ($\alpha = 0°$ und $\alpha = 90°$) zurückführen. Während sie die Fälle explorieren, kommt die y-Koordinate des Punktes P nicht mehr zur Sprache. Stattdessen fokussieren sich beide auf das Referenzdreieck. Die entsprechende Zuordnungsvorstellung des Sinus – vom Winkel α zur Länge der Gegenkathete – ist in den Fällen $\alpha = 0°$ und $\alpha = 90°$ allerdings nicht tragfähig, da ein Referenzdreieck existiert. Im Fall $\alpha = 0°$ argumentiert Janine dementsprechend: „Der Sinus wäre natürlich 0, weil wir auch in diesem Kreis […] kein Dreieck […] mit einer Gegenkathete haben" (72–74). Im Fall $\alpha = 90°$ kommt Janine zwar zum richtigen Ergebnis, ist dann aber plötzlich überrascht, dass kein Dreieck mehr vorhanden ist. Ihr Fokus lag auf der Gegenkathete des Referenzdreiecks. Im Grenzfall nähern sich Gegenkathete und Hypotenuse an, bis sie sich schließlich überdecken und gleich werden. Janine scheint bei dieser Überdeckung die Hypotenuse aus dem Blick verloren zu haben. Auch Tim scheint auf das Referenzdreieck angewiesen zu sein, um dem Sinus am Einheitskreis Bedeutung beizumessen. Er kommentiert, dass die Sonderfälle für ihn nutzlos sind. Janine und Tim versuchen im Anschluss an diese Szene noch weitere drei Minuten, eine passende Begründung zu finden, gelangen aber zu keinem zufriedenstellenden Ergebnis.

Warum finden Janine und Tim keine Lösung? Es zeigt sich im Dialog zwischen Janine und Tim, dass zwei konkurrierende Zuordnungsvorstellungen ausgemacht werden können: Die Interpretation als y-Koordinate auf dem Einheitskreis und als Seitenverhältnis im rechtwinkligen Dreieck. Obwohl sich beide Studierenden scheinbar darüber im Klaren sind, dass ein Zusammenhang zwischen diesen Interpretationen besteht, stellt sich die Dreiecksvorstellung als

dominant heraus und verdrängt die Interpretation am Einheitskreis in ihrer Argumentation immer wieder. Es findet keine Integration der beiden Sichtweisen statt. Die Argumentation bezieht sich stets auf das Referenzdreieck, statt auf den Einheitskreis. Diese Abhängigkeit vom Referenzdreieck führt beide Studierenden dazu, sich die Situation hauptsächlich im ersten Quadranten anzusehen, wo ihre Vorstellung als Verhältnis von Seitenlängen in einem Dreieck noch trägt. In den Spezialfällen ($\alpha = 0°$ und $\alpha = 90°$) kommen beide zu den richtigen Sinuswerten, aber es fällt ihnen offensichtlich schwer, diese Werte zu begründen, da ihnen das Dreieck für die Seitenverhältnisvorstellung fehlt.

6.2.2 Larissa und Veronika – Umgang mit dem Referenzdreieck

Larissa und Veronika sind Studierende im 2. Mastersemester Mathematik auf Lehramt für die gymnasiale Oberstufe. Sie kannten sich nur aus dem Kurs *Grundbegriffe der Mathematikdidaktik*. Das vorliegende Transkript ist 128 Zeilen lang und in fünf Szenen gegliedert. Insgesamt dauert der Bearbeitungsprozess 15 Minuten.

Larissa und Veronika – Szene 1 – Aufgabe 2

```
1  Larissa:   Erkläre, warum der Schnittpunkt des inneren Kreis-
2             ses mit der y-Achse gleich Sinus Alpha ist.
3  Veronika:  Das ist der innere Kreis und der Schnittpunkt.
4  Larissa:   Und wir suchen das da [markiert die Projektion des
5             Punktes P auf der x-Achse], des inneren Kreises
6             mit der y-Achse.
7  Veronika:  Also wenn wir das jetzt hier [zeichnet eine Ver-
8             bindungslinie vom Punkt P zum Schnittpunkt mit
9             der x-Achse]...ähm das machen, dann sieht man das
10            direkt [Veronika neigt den Kopf]. Also das ist,
11            ähm, hier das ist der Sinus [zeigt auf die einge-
12            zeichnete Strecke]. Äh, ja Sinus von Alpha und das
13            ist minus irgendwas.
14 Larissa:   Ja, minus null Komma sechs, ne?
15 Veronika:  Ja, genau. Müssen nur das ganze direkt ablesen.
```

Larissa wiederholt zunächst die Fragestellung der Aufgabe „Erkläre, warum der Schnittpunkt des inneren Kreises mit der y-Achse gleich Sinus Alpha ist“ (1–2). Veronika zeigt daraufhin auf den inneren Kreis und den Schnittpunkt und benennt diesen. Anschließend markiert Larissa einen Punkt auf der x-Achse und sagt, dass dies das gesuchte Objekt ist. Veronika zieht als nächstes eine Verbindungslinie

vom Punkt P zur x-Achse und bemerkt: „Dann sieht man das direkt“ (9–10). Sie zeigt auf die gezeichnete Strecke und sagt „Also das hier, das ist der Sinus“ (10–11) und schätzt einen Wert von „minus irgendwas“ (13). Larissa schätzt einen Wert von „$-0{,}6$“ (14) und Veronika stimmt ihr zu.

Es folgt eine Interpretation dieser kurzen Szene. Es lassen sich im Ansatz unterschiedliche Zuordnungsvorstellungen von Larissa und Veronika rekonstruieren. Larissa markiert einen Punkt auf der x-Achse und sagt explizit, dass dieser dem Sinus von Alpha entspricht. Kurz darauf zeichnet Veronika eine Strecke ein, zeigt darauf und sagt „das ist der Sinus“ (11). Für Larissa ordnet der Sinus dem Winkel α also einen Wert auf der x-Achse zu, Veronika bezieht sich auf die gerichtete Länge des Referenzdreiecks. Dabei ist es zunächst irrelevant, dass Larissa fälschlicherweise annimmt, dass der Wert $\sin(\alpha)$ auf der x-Achse statt der y-Achse abzulesen ist. Obwohl sie von der y-Achse spricht, zeigt sie mehrmals auf den Schnittpunkt mit der x-Achse. Es ist möglich, dass es sich hier um eine schlichte Verwechslung handelt. Schauen wir nun, wie sich die Situation weiterentwickelt:

Larissa und Veronika – Szene 2 – Aufgabe 2

```
16 Veronika:  Warum. [seufzt] Weil es vielleicht...kann man
17            das ein bisschen mit der Projektion...
18 Larissa:   Weil wir hier, nö, weil wir hier einfach dieses
19            rechtwinklige Dreieck einzeichnen können.
20 Veronika:  Ja, richtig.
21 Larissa:   Und dann, denn wir können uns ja auch den Kreis
22            dann wegdenken.
23 Veronika:  Ja, wir berechnen ja eigentlich hier nur den Sinus
24            im Einheitskreis. Wie wir sehen. Wir haben einen
25            Einheitskreis und, ähm, zufällig äh...
26 Larissa:   Ja, zufällig liegt dieser Kreis genau so dass das
27            passt.
28 Veronika:  Also wichtig ist halt eben...vielleicht können wir
29            das noch ein bisschen...wir haben uns jetzt ja ei-
30            gentlich nur den Einheitskreis angeguckt für die
31            Argumentation. Warum ist für diesen innenliegenden
32            Kreis, ähm... das ist dieser Zufall vorhanden...
33            Dass es gerade der Sinus und hier den Schnitt-
34            punkt...weil man hier den Schnittpunkt mit der
35            y-Achse anguckt. Da könnten wir nochmal über-
36            legen.
```

Die nächste Szene beginnt mit Veronika, die sich fragt, warum ihre Vermutung gilt und ob „man da ein bisschen mit der Projektion" (17) begründen kann. Larissa unterbricht sie und verneint „weil wir hier einfach dieses rechtwinklige Dreieck einzeichnen können" (18–19). Veronika stimmt ihr zu. Woraufhin Larissa meint, dass man sich den Kreis auch wegdenken könnte. Veronika stimmt erneut zu und begründet dies damit, dass sie ja einfach nur den Sinus am Einheitskreis berechnen. Larissa unterbricht Veronika in ihrem Satz und führt ihn zu Ende mit den Worten: „Ja, zufällig liegt dieser Kreis genau so, dass das passt" (26–27). Veronika fängt daraufhin mehrere Sätze an, die sie nicht beendet. Sie fängt an darüber zu sprechen, was „wichtig ist" (28), und dass sie bisher „ja eigentlich nur den Einheitskreis angeguckt" (30) haben. Sie fragt sich, was es mit dem innenliegenden Kreis auf sich hat und warum „dieser Zufall vorhanden" (32) ist, dass der Sinus mit dem Schnittpunkt auf der y-Achse übereinstimmt.

In dieser Szene versuchen Larissa und Veronika die Wahl ihrer Zuordnung zu begründen. Veronika beginnt damit über eine Projektion zu sprechen, allerdings gelingt es ihr nicht, Sätze zu formulieren, die einen genaueren Einblick in ihre Vorstellungen gewähren. Es ist möglich, dass sie mit einer Projektion auf die entsprechenden Achsen versucht, die Länge der von ihr eingezeichneten Gegenkathete zu bestimmen. Larissa wählt einen anderen Weg. Sie begründet die Wahl ihres Punktes auf der x-Achse damit, dass ein Referenzdreieck einzeichnet werden kann. Der innere Kreis spielt für sie zunächst keine Rolle mehr und lässt sich ganz einfach wegdenken. Larissa und Veronika fahren fort:

Larissa und Veronika – Szene 3 – Aufgabe 2

```
[Zeile 37-42 des Transkripts wurden ausgespart]
43 Veronika:  Wir müssen jetzt nochmal gucken, warum dann der
44            Schnittpunkt, ähm...
45 Larissa:   Genau da liegt, ne?! [zeigt auf den Schnittpunkt
46            mit der x-Achse] Wenn man den verschieben würde...
47            [fährt mit ihrem Stift den Einheitskreis vom Punkt
48            P aus im Uhrzeigersinn entlang] Das ist eine coole
49            Sache hier.
50 Veronika:  Ja. [beide lachen]
51 Larissa:   Ich male das nochmal hier so rein irgendwie [setzt
52            den Stift im 2. Quadranten an] oder hier ist noch
53            viel Platz nur woanders, hier irgendwie. [geht in
54            den 1. Quadraten und zeichnet dort einen Kreis
55            ein]
```

```
56 Larissa:   Ja, perfekt wird das jetzt auf jeden Fall nicht...
57            Also das hängt mit diesem Innenkreisradius zusam-
58            men. Weil der zufälligerweise immer genau da rich-
59            tig landet. Oder halt doch nicht zufälligerweise?
60 Veronika:  Genau, das ist die Frage, warum...?
61 Larissa:   Das sieht eigentlich nicht so gut aus hier, ne?!
```

Nachdem Veronika und Larissa zunächst davon ausgingen, dass es sich bei der Übereinstimmung zwischen dem Schnittpunkt des kleinen Kreises und der x-Achse sowie dem Wert von $\sin(\alpha)$ um einen „Zufall" (32) handelt, der nur im Einzelfall stimmt, versuchen die Beiden nun ein Argument dafür zu liefern, dass diese Gleichheit „halt doch nicht zufälligerweise" (59) vorliegt. Larissa fährt zunächst mit ihrem Stift den Einheitskreis entlang und macht den Anschein, als würde sie auf mentaler Ebene mit der vorliegenden Figur operieren, indem sie den Punkt P auf dem Einheitskreis verschiebt. Sie sagt, dass es sich um „eine coole Sache hier" (48–49) handelt. Als Vorstellungshilfe setzt sie den Stift im zweiten Quadranten an, um dort einen Kreis einzuzeichnen und einen weiteren Fall zu betrachten. Sie entscheidet sich letztlich dafür, den Kreis im ersten Quadranten einzuzeichnen.

Larissa wechselt in dieser Szene von einer statischen zu einer dynamischen Sichtweise. Wo sie zu Anfang noch auf den Einzelfall fixiert war, scheint sie nun zu begreifen, dass es sich bei der Skizze um einen exemplarischen Fall handelt, der sich verallgemeinern lässt. Sie lässt den Punkt gedanklich am Einheitskreis entlang wandern und stellt sich vor, wie der Kreis und die entsprechenden Punkte mitwandern. Erst durch das mentale Operieren am Einheitskreis entwickelt Larissa ein dynamisches Verständnis, das dabei hilft, den Sachverhalt zu verallgemeinern. Dahingegen führte die Betrachtung des Referenzdreiecks im vorherigen Teil stets zu einer sehr statischen, auf den Einzelfall fokussierten Sichtweise. Zum besseren Verständnis führt Larissa ihre Überlegungen im ersten Quadranten genauer aus.

Larissa und Veronika – Szene 4 – Aufgabe 2

```
[Zeilen 62-74 des Transkripts wurden ausgespart]
75 Larissa:   Ich bin mir nicht sicher so, diese Zeichnung sieht
76            so schlecht aus, dass ich vermuten würden, dass
77            das hier nicht stimmt - wobei ich hab den hier zu
78            tief angesetzt und dann da und dann passt es doch
79            wieder, aber sieht ja eigentlich nicht so gut aus,
80            ne?!
```

81 **Veronika:** Aber wichtig ist ja halt, ob du hier [zeichnet
82 eine Linie vom Punkt zur x-Achse] dann runter
83 kannst und das sieht eigentlich ganz gut aus, ne?!
84 **Larissa:** Die Frage ist halt: nur würde der Kreis dann auch
85 wirklich...
86 **Veronika:** Ja das ist halt, das könnte sein, dass das ein
87 bisschen konstruiert ist, jetzt an der Stelle weil
88 du weißt wo du hin willst.
89 **Larissa:** Aber wir können jetzt glaube ich nur sagen, dass
90 das hier zufälligerweise gut ist. Weil wir halt
91 dieses rechtwinklige Dreieck da einzeichnen kön-
92 nen. Fertig.
93 **Veronika:** Genau, wir können sagen, warum wir das können aber
94 wir können nicht jetzt erklären warum das passt.

Nachdem Larissa ihre Zeichnung angefertigt hat, kommen ihr Zweifel, da ihre Skizze nicht den Eindruck erweckt, sie könnte ihre Annahme stützen (Abbildung 6.4).

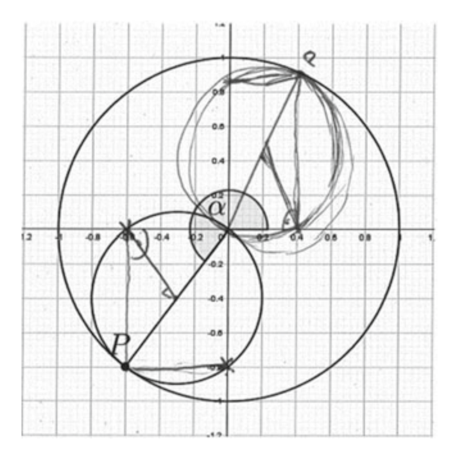


Abbildung 6.4
Hilfsskizze von Larissa und Veronika zu Aufgabe 2

Veronika teilt ihre Zweifel: Sie ist der Meinung, dass die Skizze etwas konstruiert sein könnte, „weil du weißt wo du hin willst“ (87–88). Larissa gibt sich geschlagen und verweist erneut auf den Zufall. Die abschließenden Worte Veronikas fassen ihr Bemühen wie folgt zusammen: „Wir können sagen, warum wir das können, aber wir können nicht jetzt erklären warum das passt“ (93–94). Die Bearbeitung der Aufgabe endet an dieser Stelle und beide widmen sich der nächsten Aufgabe.

In Larissas Argumentationsweise wird der Gegensatz zwischen dem statischen Charakter der Definition des Sinus am rechtwinkligen Dreieck und dem dynamischen Charakter der Einheitskreisdefinition deutlich. Erst durch das mentale

Operieren am Einheitskreis gelangt Larissa kurzzeitig zu der Vermutung, dass die Aufgabe einen allgemeingültigen Fall darstellt. Die Rückbesinnung auf das rechtwinklige Dreieck führt dazu, dass Larissa sich erneut auf den Einzelfall bezieht und den Zufall als Grund angibt. Offenbar fehlen ihnen die technischen Mittel um eine genauere Analyse durchzuführen. An dieser Stelle würden geometrische Hilfsmittel wie ein Zirkel oder dynamische Geometriesoftware die Exploration vereinfachen.

Nach der Bearbeitung der dritten Aufgabe kehren Larissa und Veronika noch einmal für einen Moment zurück zu Aufgabe 2. Es beginnt der folgende Dialog:

Larissa und Veronika – Szene 5 – Aufgabe 2

95 **Larissa:** Aber liest man Sinus auf x- oder auf y-Achse ab?
96 **Veronika:** Hm...auf der y-Achse. [zeichnet eine imaginäre
97 Achse von oben nach unten und zeigt auf die Ver-
98 bindungslinie vom Punkt P zur x-Achse]
99 **Larissa:** Und warum ist das dann hier auf der x-Achse [zeigt
100 auf die x-Achse]... wir haben es hier auf der x-
101 Achse eingezeichnet.
102 **Veronika:** Nee.
103 **Larissa:** Doch. Das ist doch die x-Achse.
104 **Veronika:** Nee, hier. [zeigt auf die Strecke von P zur x-
105 Achse] Die hier haben wir eingezeichnet. Das ist
106 die y-Achse,[zeigt auf die y-Achse und geht mit
107 dem Stift hoch und runter] das ist minus. [zeigt
108 auf die Strecke und geht hoch und runter]
109 **Larissa:** Ja, aber dann stimmt ja dieser Wert nicht. [zeigt
110 auf den Punkt auf der x-Achse] Dann muss das ja
111 dieser Wert sein. [zeigt auf die y-Achse] Wenn wir
112 den da ablesen wollen.
113 **Veronika:** Den Wert haben wir falsch gesagt, [zeigt auf den
114 Punkt] das stimmt.
115 **Larissa:** Ja, okay. Also Korrektur hierzu. [zeichnet eine
116 Verbindungslinie zwischen P und der y-Achse ein]
117 Wir sind hier bei null Komma acht.
118 **Veronika:** Wir haben da halt das Dreieck eingezeichnet und
119 den Schnittpunkt gebildet, ne?!
120 **Larissa:** Und das ist auch okay so.
121 **Veronika:** Aber Sinus konnten wir hier ablesen ganz genau.
122 **Larissa:** Okay, ja dann lesen wir den mal hier neu ab.
123 **Veronika:** Wir haben den auch gar nicht aufgeschrieben.
124 **Larissa:** Okay.
125 **Veronika:** Also das eine ist der Schnittpunkt und das wie
126 wir uns das Dreieck mit der Projektion quasi vor-
127 stellen und das andere ist wo wir es ablesen.

Larissa fragt zu Beginn der Szene, ob der Sinuswert auf der x- oder der y-Achse abgelesen wird. Veronika antwortet „Hm… auf der y-Achse“ (96) dabei zeichnet sie eine vertikale Linie vom Punkt P zur x-Achse. Larissa fragt daraufhin „und warum ist das hier auf der x-Achse? Wir haben es hier auf der x-Achse eingezeichnet“ (100–102) dabei zeigt sie auf den Punkt auf der x-Achse. Veronika verneint die Aussage. Sie sagt sie haben „die hier“ (106) eingezeichnet und fährt zunächst mit ihrem Stift die Verbindungsstrecke von P zur x-Achse ab und anschließend die y-Achse. Larissa entgegnet ihr, dass sie in diesem Fall den falschen Wert abgelesen haben und nicht auf die x-Achse sondern auf die y-Achse schauen müssen. Veronika stimmt ihr zu „Den Wert haben wir falsch gesagt. Das stimmt“ (113–114). Larissa korrigiert den Fehler. Sie zeichnet eine Verbindungsstrecke von P zur y-Achse ein und liest einen Wert von „0,8“ (117) ab. Veronika versucht den Fehler nachzuvollziehen und sagt „Wir haben da halt das Dreieck eingezeichnet und den Schnittpunkt gebildet“ (118–119) und wenig später „Aber Sinus konnten wir hier ablesen ganz genau“ (121). Am Ende der Szene fasst sie zusammen: „Also das eine ist der Schnittpunkt und das wie wir uns das Dreieck mit der Projektion quasi vorstellen und das andere ist wo wir es ablesen“ (125–127).

Larissas Frage, ob der Sinuswert auf der x- oder der y- Achse abgelesen wird, ist rein technischer Natur. Sie geht nicht darauf ein, *was* bestimmt wird, sondern nur darauf, *wie* vorgegangen wird, um den gesuchten Wert zu erhalten. Es ist also nicht klar, ob Larissa die Koordinaten des Punktes P bestimmen will oder ob sie an die Länge der Gegenkathete des Referenzdreiecks denkt. Veronika antwortet korrekt, dass der Wert auf der y-Achse abgelesen wird. Entscheidend ist an dieser Stelle allerdings nicht, was Veronika sagt, sondern welche Geste sie ausführt. Sie deutet die Strecke von P zur x-Achse an. Diese Strecke kann auf zwei verschiedene Weisen interpretiert werden:

1. Es handelt sich um die Gegenkathete des Referenzdreiecks. Der gesuchte Wert ist somit gleich der gerichteten Länge dieser Strecke.
2. Es handelt sich um eine Hilfslinie um die Projektion des Punktes P auf die x-Achse anzudeuten. Auf diese Weise erhält man die x-Koordinate des Punktes P.

Es ist möglich, dass die beiden Funktionen dieser Linie von Larissa und Veronika durcheinandergebracht wurden. Hinzu kommt, dass man zur Bestimmung der Länge der Gegenkathete eine Verbindungsstrecke vom Punkt P zur y-Achse einzeichnen kann, so wie es Larissa wenig später tut.

6.2.3 Zusammenfassung – Aufgabe 2

In beiden Fallstudien nutzen die Studierenden unterschiedliche Zuordnungsvorstellungen der Sinusfunktion, zwischen denen differenziert werden muss, um die jeweiligen Erklärungsmodelle zu rekonstruieren. Der Sinus kann zum einen als Zuordnung zwischen einem Winkel und dem Seitenverhältnis in einem rechtwinkligen Dreieck verstanden werden, was im Einheitskreis zu der Betrachtung des Referenzdreieck führt, zum anderen ordnet der Sinus einem Winkel α die y-Koordinate eines Punktes P auf dem Einheitskreis zu.

In beiden Fallstudien stellt sich die Referenzdreiecksvorstellung (vgl. Abschnitt 4.6.3) als dominant heraus, führt allerdings auch immer wieder zu Schwierigkeiten. Janine und Tim haben Probleme damit, dem Referenzdreieck in den Grenzfällen $\alpha = 0°$ und $\alpha = 90°$ eine Bedeutung zukommen zu lassen, da das Dreieck in diesen Fällen entartet und die Hypotenuse mit der Gegenkathete bzw. der Ankathete zusammenfällt. Veronika und Larissa fällt es zunächst schwer, Gegenkathete und Hypotenuse des Referenzdreiecks zu identifizieren, da dieses nicht im ersten Quadranten liegt. Anschließend gibt es Komplikationen bei der Bestimmung der Seitenlänge der Gegenkathete: Das Einzeichnen der Gegenkathete führt Larissa zu dem Schnittpunkt mit der x-Achse, dessen x-Wert sie im Verlauf des Bearbeitungsprozesses als Sinuswert interpretiert. Eine weitere Gemeinsamkeit in beiden Bearbeitungsprozessen liegt darin, dass beide Paare versuchen, den Sachverhalt in den ersten Quadranten zu legen und dort weiter zu bearbeiten. Dieses Vorgehen hängt damit zusammen, dass im ersten Quadranten die Definition des Sinus am rechtwinkligen Dreieck und die Definition am Einheitskreis übereinstimmen und keine gerichteten Längen vorkommen. Eine Fokussierung auf die Definition des Sinus über die y-Koordinate und damit verbunden eine Anwendung der Koordinatenvorstellung des Sinus (vgl. Abschnitt 4.6.4), hätte den Studierenden bei der Lösung dieser Aufgabe möglicherweise geholfen.

6.3 Aufgabe 3: Modellierung periodischer Prozesse

In der dritten Aufgabe sollten die Studierenden die Schwingung eines Federpendels mathematisch modellieren. Der Aufgabentext lautet:

> *Vor dir befindet sich ein Federpendel, an dem ein Gewichtsstück der Masse* $0,5$ *kg befestigt ist. Im Ruhezustand befindet sich das untere Ende des Gewichtsstücks* $16,5$ *cm über der Tischplatte.*

Lenke das Gewicht so aus, dass es sich $10,5$ *cm über der Tischplatte befindet. Lass das Gewicht los und bestimme die Zeit, die es braucht, um wieder zum Tiefpunkt zurückzukehren.*

Nutze dazu die Handyapp. Miss die Zeit von fünf aufeinanderfolgenden Durchgängen und bilde den Mittelwert.

Stelle eine Funktionsgleichung auf, die diesen Schwingungsvorgang beschreibt.

In der Videostudie erhielten die Studierenden ein Federpendel, an dem ein Gewichtsstück mit der Masse 0,5 kg aufgehängt war, und ein Lineal mit zwei Markierungen an der Stelle 16,5 cm und 10,5 cm (vgl. Abbildung 6.5). Im Ruhezustand befand sich das untere Ende des Gewichtstücks 16,5 cm über der Tischplatte. Die Studierenden wurden dazu aufgefordert, das Gewichtsstück auf 10,5 cm über die Tischplatte auszulenken, loszulassen und die Schwingungsdauer mit der Stoppuhr ihres Handys zu bestimmen. Insgesamt sollten fünf aufeinanderfolgende Durchgänge gemessen und daraufhin ein Mittelwert gebildet werden. Anschließend sollten die Studierenden ein Funktionsterm bestimmen, der den Schwingungsvorgang beschreibt.

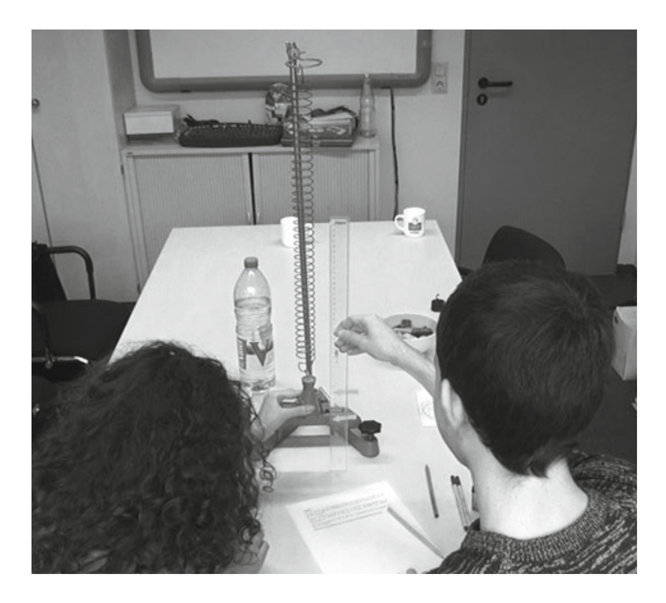


Abbildung 6.5 Modellierung am Federpendel

Die Schwingungsdauer des verwendeten Federpendels mit einem Gewichtsstück der Masse $0,5$ kg beträgt in etwa $0,78$ Sekunden und ist unabhängig von

der Auslenkung, wenn diese nicht zu groß wird. Unter der Annahme, dass es sich um eine ungedämpfte Schwingung handelt, kann dieser Vorgang mithilfe der allgemeinen Sinusfunktion $g(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$ modelliert werden. Dabei beeinflusst a die Amplitude, b die Periodenlänge, c die Phasenverschiebung und d die Verschiebung in y Richtung. Wird das Koordinatensystem in geeigneter Weise gewählt, können c und d gleich 0 gesetzt werden. Die Aufgabe besteht dann darin, die Faktoren a und b zu bestimmen, die jeweils von der Auslenkung und der Frequenz abhängen. Da das Gewichtsstück um 6 cm ausgelenkt wurde, ist $a = 6$. Der Faktor b ergibt sich, indem der Wert 2π durch die Periodendauer von $0,78$ geteilt wird: $b = \frac{2 \cdot \pi}{0,78}$. Die Modellfunktion hat dann die Form $h(x) = 6 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{0,78} \cdot x\right)$ und es gilt $h(k \cdot 0,78) = 0$ für alle $k \in N$ (vgl. Abbildung 6.6).

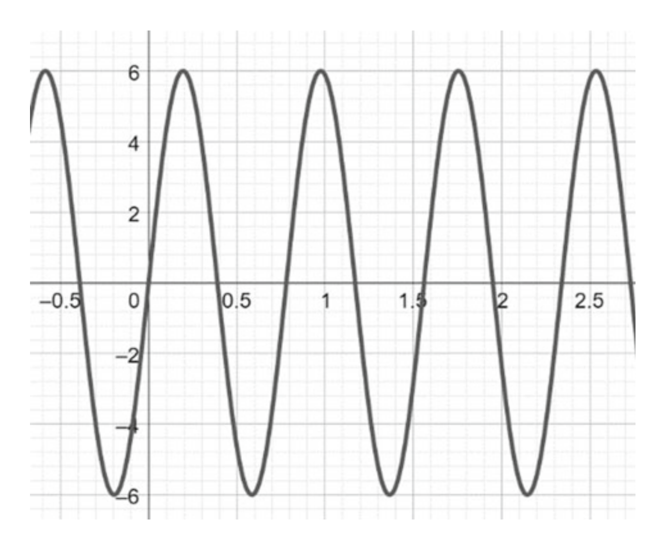


Abbildung 6.6 Graph der Modellfunktion $h(x) = 6 \cdot sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{0,78} \cdot x\right)$

Aus mathematischer Sicht sollten die Studierenden mit den folgenden charakteristischen Eigenschaften der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ vertraut sein:

- $\sin(0) = 0$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- die Funktion $\sin(x)$ ist 2π-periodisch

- der Wertebereich der Sinusfunktion ist $[-1, 1]$

Weiterhin sind die Studierenden im Idealfall in der Lage, sicher mit der allgemeinen Sinusfunktion $g(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ umzugehen, und wissen, wie sich Änderungen der Parameter auf den Graphen der Sinusfunktion auswirken.

Während des Modellierungsprozesses müssen die Studierenden zwischen drei Darstellungsebenen wechseln können. Die entsprechenden Ebenen sind:

1. Die symbolische Ebene, in der die Funktion als Term gegeben ist
   $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$.
2. Die graphische Ebene, in der die Funktion als Funktionsgraph im kartesischen Koordinatensystem gegeben ist.
3. Die inhaltliche Ebene, in der die Funktion als Schwingungsvorgang beschrieben wird.

Während des Bearbeitungsprozesses muss auf diesen Darstellungsebenen mental operiert werden. Dabei untersuchen die Studierenden, wie sich die Veränderung eines Parameters auf die entsprechende Eigenschaft der Funktion auf einer anderen Darstellungsebene auswirkt:

Parameter in $a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$	**Operation am Funktionsgraphen**	**Merkmale des Schwingungsprozesses**
d	Verschiebung entlang der y-Achse	Anpassung der Schwinghöhe
c	Verschiebung entlang der x-Achse	Anpassung des Startzeitpunkts
b	Stauchung/Streckung entlang der x-Achse	Anpassung der Periode
a	Stauchung/Streckung entlang der y-Achse	Anpassung der Amplitude

Die Zusammenhänge zwischen den Parametern der allgemeinen Sinusfunktion und den entsprechenden Operationen am Funktionsgraphen zu erkennen, gehört zu den Grundkenntnissen der Objektvorstellung einer Funktion. Die Vernetzung zu den Merkmalen des Schwingungsprozesses erfordert darüber hinaus Modellierungskompetenzen und lässt sich mit der Oszillationsvorstellung in Verbindung bringen.

6.3.1 Alexander und Lisa – Modellierung periodischer Prozesse

Alexander und Lisa sind Kommilitonen im 1. Mastersemester. Beide sind Mathematik-Lehramtsstudierende für die gymnasiale Oberstufe. Das vorliegende Transkript ist 165 Zeilen lang und ist untergliedert in vier Szenen. Die Bearbeitung der Aufgabe dauert insgesamt 12:36 Minuten.

Alexander und Lisa verbringen zu Beginn des Bearbeitungsprozesses ca. vier Minuten damit, die Schwingungsdauer des Federpendels zu bestimmen. Dazu messen sie mehrere Schwingungsvorgänge und bilden den Mittelwert. Sie erhalten einen Wert von 0,78 Sekunden und beginnen damit eine Funktionsgleichung aufzustellen:

Alexander und Lisa – Aufgabe 3 – Szene 1

```
1  Alexander: So, wir hätten 0,78. Das heißt, wir müssen jetzt
2             ja eine Funktionsgleichung finden, die diesen
3             Schwingungsvorgang beschreibt. Auf jeden Fall ha-
4             ben wir ja für die...das ist immer nach null Komma
5             sieben acht ist es ja wieder auf dem...ist es ja
6             wieder bei einem Tiefpunkt angekommen.
7  Lisa:      Ja.
8  Alexander: Das heißt, es fängt ja unten an, das heißt wir ha-
9             ben hier irgendwie...[zeichnet eine Welle auf das
10            Papier] ja...so müsste das ja aussehen und hier
11            zwischen Tiefpunkt und Tiefpunkt [zeigt auf die
12            Tiefpunkte der Welle und ordnet ihnen Werte zu]
13            haben wir...ja, hier null Komma sieben acht, eins
14            Komma fünf sechs. Und wir haben ja eine Auslenkung
15            von... Hochpunkt ist ja. Ah ne, wir wissen nicht
16            was der höchste Punkt ist, oder?
17 Lisa:      Ja schon, achso. Doch bei zehn Komma...
18 Alexander: Ja zehn Komma fün... also hier unten ist ähm...
19            war zehn Komma fünf als tiefster Punkt.
20 Lisa:      Nee, als tiefster Punkt ist doch sechzehn Komma
21            fünf...ach nee, genau ja...unten zehn Komma fünf
22            oben sechszehn Komma fünf.
23 Alexander: Genau, aber das Problem ist ja, wenn es schwingt
24            [versetzt das Pendel in Schwingung] schwingt es
25            über den...schwingt es über den? [legt das Lineal
26            an] Ja genau es schwingt ja auch etwas höher.
```

```
28 Lisa:       Mhm, ja.
29 Alexander:  Denn wir müssen doch, ah ich bin gerade...Wir
30             müssen ja irgendwas. Müssen wir die Amplitude und
31             die Frequenz oder sowas weiter, wiedergeben...Ge-
32             nau, das heißt, wir müssen ja doch eigentlich auch
33             wissen wie hoch der steigt, oder?
```

Alexander beginnt damit, den Mittelwert von 0,78 bSekunden mit der Pendelschwingung in Verbindung zu bringen. Er sagt „das ist immer nach null Komma sieben acht ist es ja wieder auf dem… ist es ja wieder bei einem Tiefpunkt angekommen“ (4–6). Lisa stimmt ihm zu. Daraufhin fertigt Alexander eine Skizze an. Er zeichnet eine Welle auf ein Stück Papier, die am Tiefpunkt anfängt und drei Perioden durchläuft. Anschließend ordnet er jedem Tiefpunkt der Reihe nach eine Zahl zu und schreibt diese auf „hier null, hier null Komma sieben acht, eins Komma fünf sechs.“ (12–14). Als nächstes möchte er die Auslenkung in die Skizze eintragen. Er stoppt und fragt sich „Ah nee, wir wissen nicht was der höchste Punkt ist, oder?“ (15–16). Lisa antwortet ihm „Ja schon, achso. Doch bei zehn Komma…“ (17). Alexander berichtigt sie und weist daraufhin, dass 10,5 der Wert für den Tiefpunkt ist (19). Lisa zweifelt kurz an seiner Behauptung, gibt ihm dann aber Recht. Nachdem Alexander und Lisa ihre Unstimmigkeit beigelegt haben, weist Alexander daraufhin, dass bei dem Schwingungsvorgang das Pendel über den Ruhezustand hinaus schwingt „Genau, aber das Problem ist ja, wenn es schwingt […] schwingt ja auch etwas höher“ (23–26). Er bestätigt seine Aussage zeitgleich damit, dass er das Pendel in Schwingung versetzt und das Lineal danebenhält. Lisa stimmt ihm zu. Alexander versucht sich zu erinnern, welche Informationen sie brauchen um die Modellfunktion aufzustellen. Er spricht von der Amplitude und der Frequenz und merkt an, dass sie dafür wissen müssen „wie hoch der steigt“ (33).

In dieser Szene sind bei Alexander und Lisa bereits Überlegungen zu erkennen, die der Objektvorstellung einer Funktion zugeordnet werden können. Dazu gehören beispielsweise das Bestimmen globaler Eigenschaften einer Funktion, das Verschieben des Funktionsgraphen im Koordinatensystem und das simultane Arbeiten auf unterschiedlichen Darstellungsebenen. Alexander beginnt damit, die Skizze einer Welle auf das Papier zu zeichnen und legt so erste Eigenschaften der Modellfunktion $h(x)$ fest, die im weiteren Verlauf des Bearbeitungsprozesses eine Rolle spielen. Alexander trägt 0 beim ersten Tiefpunkt ein und addiert sukzessiv den Wert $0,78$ bei jedem weiteren Tiefpunkt. Die Modellfunktion hat also eine Periodenlänge von $0,78$. Außerdem hat $h(x)$ bei $x = 0 + k \cdot 0,78$ jeweils einen Tiefpunkt.

Anschließend beschäftigen sich Alexander und Lisa mit der Auslenkung des Pendels bzw. der Amplitude der Modellfunktion $h(x)$. Beide versuchen die Parameter der Modellfunktion aus dem Schwingungsvorgang herzuleiten. Sie kommen zu dem Schluss, dass der tiefste Punkt des Pendels bei 10, 5 liegt. Sie wissen aber nicht, wo der höchste Punkt liegt. Alexanders letzte Aussage in Bezug auf die Amplitude der Funktion deutet auf eine Fehlvorstellung hin: Er sagt „Wir müssen […] die Amplitude […] wiedergeben […] das heißt, wir müssen ja doch eigentlich auch wissen wie hoch der steigt, oder?“ (29–33). Der Begriff der Amplitude bezieht sich für Alexander scheinbar auf den Hochpunkt der Sinusfunktion. Er denkt, dass es notwendig ist zu wissen, wie hoch die Funktion steigt, um die Amplitude der Sinusfunktion zu bestimmen. Er denkt scheinbar, dass es nicht reich, zu wissen, welchen Wert der Tiefpunkt annimmt. Er lässt außer Acht, dass die Amplitude aus Symmetriegründen auch über den Tiefpunkt bestimmt werden kann.

Wie lässt sich diese Fehlinterpretation erklären? Es ist auffallend, dass Alexander und Lisa große Schwierigkeiten haben, den Schwingungsprozess korrekt zu erfassen. Es scheint, als läge die Problematik nicht allein in der mathematischen Verwendung der Sinusfunktion, sondern zu einem Großteil in den Wissenslücken, die sich im Bereich der Modellierung periodischer Prozesse auftun. Die wesentlichen Eigenschaften dieser Prozesse müssen von ihnen erst erkundet werden. Dazu gehört die Erkenntnis, dass das Pendel in einer harmonischen Schwingung von der Ruheposition den gleichen Weg nach oben wie nach unten zurücklegt. Schauen wir nun, wie Alexander und Lisa weiter vorgehen.

Alexander und Lisa – Aufgabe 3 – Szene 2

```
[Zeile 34-38 des Transkriptes wurden ausgespart]
39 Alexander: Ja das war doch immer bei Sinus beziehungsweise
40            bei Kosinusfunktion, äh null war glaube ich eine
41            Sinus [zeigt auf den Tiefpunkt der skizzierten
42            Wellenfunktion] aber war doch immer, dass man wenn
43            wir wissen wie hier der Abstand, ähm, jeweils ist
44            zwischen Tiefpunkt und Tiefpunkt, aber wir müssen
45            doch eigentlich auch für eine Funktion bestimmen
46            können, was es für eine Auslenkung hat, oder?
47 Lisa:      Also... ich hätte gedacht...ja, aber.
```

```
48 Alexander: Denn... schwingt das in die andere Richtung. Müss-
49            te es bei so einem Pendel... das schwingt wahr-
50            scheinlich in die andere Richtung genausoweit wie
51            es äh...
52 Lisa:      Das hab ich gerade auch gedacht, das man eher so
53            damit.
54 Alexander: Wenn man quasi, wenn wir es sechs Zentimeter nach
55            unten ziehen, dass es dann auch [hält das Lineal
56            ans Federpendel und lenkt das Gewichtsstück aus]
57            ja es passt glaub ich, es schwingt dann auch sechs
58            äh... ja das waren sechs Zentimeter. Das heißt,
59            der höchste Punkt wird äh zweiundzwanzig Komma
60            fünf dann sein [schreibt den Wert 22,5 an einen
61            Hochpunkt der gezeichneten Kurve]. Das heißt, wir
62            haben ja insgesamt zwölf Zentimeter hoch [zeich-
63            net in die Funktionsskizze den Abstand von Hoch zu
64            Tiefpunkt ein und markiert ihn mit 12 cm]. Ah, das
65            ist doch dann, das ist doch sowas, Sinus von. Also
66            wir haben ja am Ende denk ich, weil Sinus ja bei
67            null anfängt, haben wir ja auf jeden Fall plus
68            zehn Komma fünf stehen. [schreibt +10,5 auf das
69            Papier], damit ist ja nochmal... und dann ist es
70            doch irgendwie allgemein dieses Sinus von k... ich
71            glaube das da werden wir, äh, da komm ich glaub
72            ich nicht weiter an der Stelle wie die...
73            [Pause von 10 Sekunden]
```

Alexander unterscheidet zu Beginn dieser Szene die Kosinusfunktion von der Sinusfunktion mit den Worten „äh null war glaub ich eine Sinus" (40–41) und zeigt dabei auf die Nullstelle der skizzierten Funktion. Er rekapituliert, dass man zur Bestimmung der Funktion zunächst wissen muss „wie hier der Abstand, ähm, jeweils ist zwischen Tiefpunkt und Tiefpunkt" (43–44) und dann noch „was es für eine Auslenkung hat" (46). Lisa stimmt ihm zu. Alexander stellt die Vermutung auf, dass das Pendel während einer Schwingung ausgehend vom Ruhezustand in beide Richtungen gleichweit schwingt. Auch darin stimmt Lisa zu. Alexander bestätigt seine Vermutung indem er das Pendel zum Schwingen bringt und das Lineal danebenhält. Er kommt zu dem Schluss, dass sich das Pendel am höchsten Punkt 22, 5 cm über der Tischplatte befindet. Er hält sein Ergebnis fest, schreibt den Wert 22, 5 an den Hochpunkt seiner skizzierten Wellenfunktion und bemerkt „Das heißt, wir haben ja insgesamt zwölf Zentimeter hoch" (61–62). Er versucht nun stückweise den gesuchten Funktionsterm aufzustellen „Ah, das ist doch dann, das ist doch sowas, Sinus von" (64–65) und schreibt den Wert „+10,5"

auf. Anschließend sagt er „wir haben ja am Ende denk ich, weil Sinus ja bei null anfängt, haben wir ja auf jeden Fall plus zehn Komma fünf stehen“ (66–68). An dieser Stelle hält Alexander inne und sagt, dass er nun nicht mehr weiterkommt.

In dieser Szene wird die Erkundung des Schwingungsprozesses fortgeführt. Alexander und Lisa vergewissern sich, dass das Pendel genauso hoch schwingt, wie es zuvor nach unten ausgelenkt wurde. Nachdem Alexander herausgefunden hat, dass der niedrigste Punkt der Pendelschwingung bei liegt, bestimmt er den konstanten Wert des gesuchten Funktionsterms und schreibt „$+10,5$“ auf das Arbeitsblatt. Tatsächlich hätte Alexander einen Wert von $16,5$ addieren müssen.

Welche Gründe kann es also haben, dass er den Wert $10,5$ wählt? Die Sinusfunktion unterscheidet sich durch ihre typischen Eigenschaften von anderen Funktionsklassen. Beispielsweise ist bei linearen und quadratischen Funktionen der Wert des y-Achsenabschnitts gleich dem Summanden am Ende des Funktionsterms. Es ist denkbar, dass Alexander diese Tatsache fälschlicherweise auf den vorliegenden Fall verallgemeinert und einen Wert von $10,5$ addiert. Dabei lässt er die Phase und die Amplitude der Funktion unberücksichtigt. Das Problem der Phasenverschiebung lässt sich auf Alexanders Formulierung „weil Sinus ja bei null anfängt“ (66–67) zurückführen. Er setzt den Anfang des Schwingungsvorganges mit $\sin(0)$ gleich. Dabei achtet er nur auf die Funktionswerte der Sinusfunktion und der Modellfunktion, nicht aber auf die Phase.

Alexander und Lisa – Aufgabe 3 – Szene 3

```
75 Lisa:       [räuspert sich] Also ich glaube, wir müssen uns
76             halt Gedanken machen inwiefern...also dadurch das
77             wir ja den Mittelwert bestimmt haben, sind wir ja
78             jetzt schon bei einer periodischen Darstellung.
79 Alexander:  Genau, das müssen wir auch irgendwie hier rein
80             bringen, dass wir wissen, wir haben ja normaler-
81             weise Sinus ist ja zwei Pi glaube ich.
82 Lisa:       Zwei Pi periodisch, ja.
83 Alexander:  Und jetzt muss ja quasi das zwei Pi, muss ja
84             qua... entspricht ja quasi hier unserer null Komma
85             sieben acht. Das heißt wir müssen ja...
86 Lisa:       Genau, wir haben sie halt deutlich, gestaucht.
87 Alexander:  Ja, genau.
88 Lisa:       Ist das gestaucht?
```

```
89 Alexander: Ähm, ja gestaucht. Es ist deutlich schneller. Gut,
90            das können wir ja quasi ausrechnen, oder? Das wir
91            wenn das, ähm, zwei Pi wären ja ungefähr sechs
92            Komma zwei oder sowas, wenn wir das, warte irgend-
93            wie müssen wir die beiden Zahlen miteinander tei-
94            len, dann kriegen wir glaube ich einen Faktor raus
95            und dann haben wir...zwei Pi müsste dann ja extrem
96            geteilt werden. Zwei Pi durch...durch was ergibt
97            null Komma sieben acht?...Das wäre dann null Komma
98            sieben acht durch zwei Pi, oder? Das ist glaub ich
99            der Faktor den wir äh...
```

[In den Zeilen 100-122 des Transkripts nutzen Lisa und Alexander ihre Handys um den Wert $\frac{0,78}{2\pi}$ zu berechnen. Sie kommen zu dem Ergebnis 0,124…]

```
123 Lisa:      Mal null Komma eins zwei vier, ja passt aber...
124 Alexander: Ja kommt dran. Ist es denn jetzt genau richtig?
125            Ja also irgendwie der Faktor steht ja zwischen den
126            den Werten... das heißt wir müssen, ja...
127 Lisa:      Aber das bezieht sich ja jetzt auf die Frequenz,
128            das heißt, das steht innerhalb von unserem Sinus.
129 Alexander: Ja das heißt, wir müssen quasi ja die normale
130            Funktion mit diesem Faktor...müssen wir die, den
131            müssen wir doch irgendwie darein setzen, dann ha-
132            ben wir ja quasi die Frequenz.
133 Lisa:      Genau.
```

Zu Beginn dieser Szene bemerkt Lisa, dass die Bestimmung des Mittelwerts sie zu einer periodischen Darstellung geführt hat. Alexander stimmt zu und weist darauf hin, dass sie ihr Wissen über die 2π-Periodizität der Sinusfunktion nutzen müssen. Er führt den Gedanken weiter und sagt „das zwei Pi […] entspricht ja quasi hier unserer null Komma sieben acht“ (84–85). Lisa bestätigt die Aussage und sagt „Genau wir haben sie halt deutlich gestaucht“ (86). Kurz darauf fragt sie „Ist das gestaucht?“ (88). Alexander bejaht ihre Frage „ja gestaucht. Es ist deutlich schneller.“ (89). Daraufhin fängt er an etwas auszurechnen „Wenn wir […] die beiden Zahlen miteinander teilen, dann kriegen wir glaube ich einen Faktor raus“ (92–94). Er fragt sich „zwei Pi durch… durch was ergibt null Komma sieben acht?“ (96–97) und folgert, dass der zu berechnende Faktor gleich $\frac{0,78}{2\pi}$ ist. Lisa und Alexander benutzen ihre Handys und bestimmen für den Quotienten $\frac{0,78}{2\pi}$ einen Wert von 0,124. Nachdem sie diesen Wert ermittelt haben, überlegt Alexander wo dieser Faktor in der Funktionsgleichung hingehört „der Faktor steht ja zwischen den Werten“ (125–126). Lisa erwähnt die Funktion des Faktors und

konkretisiert Alexanders Aussage „das bezieht sich ja jetzt auf die Frequenz, das heißt, das steht innerhalb von unserem Sinus“ (127–128). Alexander stimmt zu und ergänzt, dass sie den Faktor „irgendwie dareinsetzen, dann haben wir ja die Frequenz“ (131–132).

Alexander und Lisa beschäftigen sich in dieser Szene mit der Periodizität der Modellfunktion $h(x)$. Beide stimmen zu, dass die Sinusfunktion eine Periode von 2π hat. Mit seiner Bemerkung „zwei Pi [...] entspricht ja quasi unserer null Komma sieben acht“ (83–85) stellt Alexander einen Zusammenhang zwischen der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ und der Modellfunktion $h(x)$ her. Am Ende seiner Überlegung berechnen Alexander und Lisa den Faktor $\frac{0{,}78}{2\pi}$. Korrekt wäre der Faktor $\frac{2\pi}{0{,}78}$ gewesen.

Wie lässt sich dieser Fehler erklären? Alexander und Lisa verwechseln bei der Parameterbestimmung im Funktionsterm $\sin(b \cdot x)$ die Rechenoperation $\cdot$ und $\div$. Das hängt damit zusammen, dass sie die Funktion in x-Richtung stauchen wollen. Ähnliche Verwechslungen kommen bei der Parameterbestimmung quadratischer Funktionen vor. Dort wird oft fälschlicherweise die Variable x mit 2 multipliziert, um den Funktionsgraphen in x-Richtung zu strecken und durch 2 geteilt, um ihn zu stauchen. Darüber hinaus ergibt sich die Stauchung der Funktion über die Anpassung der Periode, die es zu verkleinern gilt, nämlich von 2π auf $0{,}78$. Um den Wert zu verkleinern, entscheidet sich Alexander für die Division. Dabei wird außer Acht gelassen, dass der Faktor b im Funktionsterm $\sin(b \cdot x)$ die Periodenlänge in antiproportionaler Weise beeinflusst. Das heißt, je kleiner der Faktor, desto größer die Periodenlänge.

Alexander und Lisa – Aufgabe 3 – Szene 4

134 **Alexander:** Wie kriegen wir die Höhenausgleichung, kriegt
135 man...
136 **Lisa:** Naja, da haben wir ja auch das, also Sinus von
137 null bleibt null.
138 **Alexander:** Mhm.
139 **Lisa:** Und Sinus von, äh, Pi?
140 **Alexander:** Achja, stimmt. Genau, wir haben ja genau...
141 **Lisa:** Wäre eins, ne?
142 **Alexander:** Genau und wir haben jetzt ja quasi zwölf, das
143 heißt, das Ganze wird ja verzwölf..., ja wir haben
144 eine verzw...in den Werten haben wir eine Ver-
145 zwölffachung.

```
146 Lisa:      Genau, also ist einfach [lacht] zwölf Mal Sinus.
147 Alexander: Genau, die Zwölf kommt vorher.
148 Lisa:      Genau.
149 Alexander: Zwölf Mal Sinus [schreibt "12*sin(" vor die
150            "+10,5" auf das Papier]
151 Lisa:      Bezieht sich auf die Amplitude und dann kommt
152            jetzt die Stauchung würd ich sagen.
153 Alexander: Von genau null ja und dann normalerweise wäre es
154            ja Sinus von x wär‘ ja der normale und wir machen
155            jetzt Sinus von null Komma eins.
156 Lisa:      Null Komma eins zwei vier.
157 Alexander: Null Komma eins zwei vier eins vier [schreibt die
158            Zahlen in den Funktionsterm "12*sin(0,12414x)"],
159            einfach genau und dann kommt...
160 Lisa:      Plus zehn Komma fünf wegen der Höhe auf der wir
161            starten.
162 Alexander: Ja genau, ich glaube das...[schreibt "f(x)=" vor
163            den Funktionsterm]
164 Lisa:      Sieht gut aus. [lacht]
```

Alexander beginnt die Szene mit der Frage, wie sie die „Höhenausgleichung" (134) kriegen. Lisa erwidert „also Sinus von null bleibt null […] und Sinus von, äh, Pi […] wäre eins, ne?" (136–141). Alexander stimmt zu und bemerkt: „in den Werten haben wir eine Verzwölffachung" (144–145). Daraufhin sagt Lisa „Genau, also ist einfach zwölf Mal Sinus" (146). Alexander beginnt den Funktionsterm aufzuschreiben und mit Lisa zusammen vorherige Überlegungen miteinzubeziehen. Die Zwölf „bezieht sich auf die Amplitude" (151), der Faktor im Funktionsterm gibt die „Stauchung" (152) an und „plus zehn Komma fünf wegen der Höhe auf der wir starten" (160–161). Insgesamt ergibt sich also der Funktionsterm $12 \cdot \sin(0,12414 \cdot x) + 10,5$ (vgl. Abbildung 6.7).

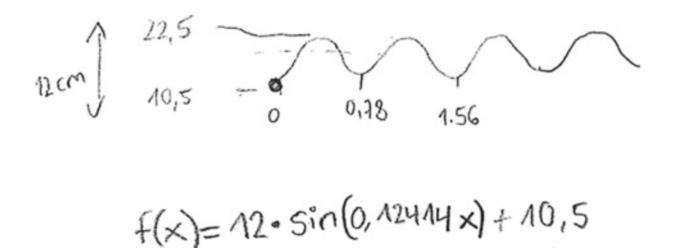


Abbildung 6.7 Endprodukt des Bearbeitungsprozesses von Alexander und Lisa

In dieser Szene beschäftigen sich Alexander und Lisa erneut mit der Amplitude der Modellfunktion $h(x)$. Zu Beginn hält Lisa fest, dass Sinus von π null gleich null ist und Sinus von gleich eins. Die Tatsache, dass Alexander ihr zustimmt, deutet daraufhin, dass beide eine falsche Vorstellung entwickelt haben, die sich möglicherweise durch die vorangegangenen Fehler erklären lässt.

Wie kommt Lisa nun also zu der Aussage $\sin(\pi) = 1$? Es ist möglich, dass es sich um eine falsche Übertragung von realen Bewegungen auf einen funktionalen Term handelt. Die Periode des realen Schwingungsvorgangs beginnt an einem Tiefpunkt, erreicht nach der Hälfte seinen Höhepunkt und kehrt dann zurück zu einem Tiefpunkt. In Szene zwei hat Alexander bereits angemerkt, dass der Sinus bei 0 beginnt und deshalb der Wert 10, 5 addiert werden muss. Dieser Denkweise folgend, liegt es nahe zu vermuten, dass der Graph der Sinusfunktion bei 0 startet, im Intervall $[0, \pi]$ von 0 bis 1 wächst und im Intervall $[\pi,\ 2\pi]$ wieder von 1 auf 0 sinkt.

6.3.2 Jana und Melanie – Manipulationen am Funktionsgraphen

Jana und Melanie sind Kommilitoninnen im zweiten Mastersemester für das Lehramt Mathematik an Gymnasien. Das vorliegende Transkript ist 198 Zeilen lang und in fünf Szenen unterteilt, die gesamte Bearbeitungsdauer beträgt 14:45 Minuten. Jana und Melanie verbringen zunächst 2:30 Minuten damit, die Schwingungsdauer mit ihren Handys zu bestimmen. Sie erhalten einen Mittelwert von 0,718 Sekunden. Schauen wir nun wie sich die erste Szene entwickelt:

Jana und Melanie – Aufgabe 3 – Szene 1

```
1  Jana:      Sind das jetzt Milli- oder Mikrosekunden...
2             Ist das jetzt einfach Sinus sieben eins Komma acht
3             x?
4  Melanie:   Nee, ich glaube wir müssen, also ich mein‘ wir ha-
5             ben ja quasi ein Schwingvorgang. Wir fangen hier
6             unten an. [zeichnet die Skizze einer Welle] Dann
7             schwingt es wieder hoch, dann schwingt es wieder
8             runter, dann schwingt es wieder hoch und so weiter
9             ... das ist ja quasi der Schwingvorgang den wir
10            haben.
11 Jana:      Aber wir messen ja erst ab hier. Wir messen ja den
12            Punkt, den Punkt, den Punkt und so weiter. [mar-
13            kiert die Tiefpunkte der Kurve]
```

14 **Melanie:** Genau, aber ich meine letztendlich ist es ja eine
15 periodische... wenn wir jetzt weiter gemessen hät-
16 ten, dann würde es ja immer so weiter gehen - auch
17 wenn es sich ja irgendwann dann quasi gegen null
18 äh, annähert. [macht eine Bewegung mit den Händen
19 und führt diese zusammen]
20 **Jana:** Und das Annähern muss man ja auf jeden Fall mit
21 reinbringen. Also je nach Zeit. Also wenn wir hier
22 *t* haben, wird die Ausschwingung ja immer geringer.
23 [zeichnet zwei Achsen in die Skizze und beschrif-
24 tet eine davon mit„*t*"]
25 **Melanie:** Aber ich würde die Achse halt eher da immer
26 in die Mitte legen, [Jana markiert die Nullstellen
27 der Sinuskurve, Melanie zieht eine Line dadurch]
28 dass wir halt, also dass wir wirklich mit Minus…
29 dass wir da nicht noch...also ich meine wir können
30 es auch einfach verschieben. Okay das wäre viel-
31 leicht sogar einfacher weil wir dann ja...
32 **Jana:** Auf jeden Fall hier haben wir die, die [bewegt
33 ihre Hand auf und ab] äh... Pendel.
34 **Melanie:** Die Schwünge.
35 **Jana:** Die Schwinghöhe. [schreibt Schwinghöhe an die
36 vertikale Achse]
37 **Melanie:** Oder einfach die, ja mehr oder weniger die
38 Entfernung von der Tischplatte?
39 **Jana:** Passt schon... so und die wird ja immer geringer
40 und wenn wir den Standard Sinus nehmen, bleibt das
41 ja gleich. Das heißt, wie kann man den Sinus ver-
42 ändern, damit das geringer wird. Hab ich bisher
43 noch nie gemacht.
44 **Melanie:** Ich auch nicht, ist auch die Frage ob wir das ma-
45 chen sollen, weil wir sollen ja nur den Schwin-
46 gungsvorgang von fünf aufeinanderfolgenden Durch-
47 gängen... also ich glaube wir sollen vielleicht
48 wirklich nur annehmen, dass es immer weiter hoch
49 und runter geht.

Jana versucht zunächst eine neue Einheit für den ermittelten Wert von 0,718 Sekunden zu finden und in „Milli- oder Mikrosekunden" (1) umzurechnen. Sie fragt anschließend, ob der gesuchte Funktionsterm die Form $f(x) = \sin(71, 8 \cdot x)$ hat. Melanie verneint und beginnt damit, sich den Schwingungsvorgang zu verdeutlichen. Dazu zeichnet sie – zunächst ohne Koordinatenachsen – eine Welle auf das Papier (vgl. Abbildung 6.8) und erklärt den Schwingvorgang.

Melanie gibt an, dass das Pendel unten anfängt zu schwingen und dann immer hoch und runtergeht: „Dann schwingt es wieder hoch, dann schwingt es wieder runter, dann schwingt es wieder hoch und so weiter" (6–8). Jana fügt hinzu „Aber wir messen ja erst ab hier" (11) und markiert die Tiefpunkte der Welle. Melanie sagt, dass der Vorgang periodisch ist und immer so weitergeht, „auch wenn es sich ja irgendwann dann quasi gegen null äh, annähert" (16–18). Jana merkt an, dass das Annähern auf jeden Fall mit eingebracht werden muss, und fängt an, in die Skizze von Melanie zwei orthogonale Achsen einzuzeichnen und

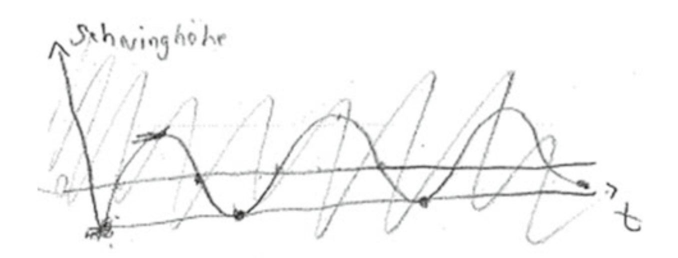


Abbildung 6.8 Skizze von Melanie und Jana

die horizontale mit t zu bezeichnen. Melanie wirft daraufhin ein, dass sie „die Achse halt eher da immer in die Mitte legen" (25–26) würde, und zeichnet eine horizontale Achse durch die Sinusfunktion, damit ihre Modellfunktion wie die Sinusfunktion negative Werte annehmen kann und sie die Sinusfunktion nicht verschieben müssen. Am Ende ihres Satzes sagt sie allerdings, dass sie die Funktion auch einfach verschieben können. Jana beschriftet als nächstes die y-Achse, sie macht eine Auf- und Abbewegung mit der Hand und sagt, dass dort die „Pendel…"(33) und Melanie ergänzt „Schwünge" sind (34). Jana beschriftet die Achse mit der Schwinghöhe. Melanie spezifiziert die Ausprägung mit „Entfernung von der Tischplatte" (37–38). Jana erklärt sich einverstanden „Passt schon" (39) und fragt sich, wie sie die Dämpfung der Schwingung modellieren sollen. Da der „Standard Sinus" (40) gleichbleibt, müssten sie den „Sinus verändern, damit das geringer wird" (41–42). Melanie weist daraufhin, dass sie nur fünf Schwingungen betrachten müssen und beschließt, dass sie die Dämpfung nicht berücksichtigen sollten. Melanie ist der Meinung, sie „sollen vielleicht wirklich nur annehmen, dass es immer weiter hoch und runter geht" (47–49).

Jana macht zu Beginn der Szene einen Umrechnungsfehler, der im Laufe der Bearbeitung nicht korrigiert wird. Der Mittelwert für die Periodendauer entspricht umgerechnet 718 Millisekunden, Jana verwendet den Wert $71,8$. Daraufhin stellt Jana eine erste Modellfunktion auf, indem sie den Wert $71,8$ in die Sinusfunktion einsetzt und so $h(x) = \sin(71,8 \cdot x)$ erhält. Was auf einen ersten Blick willkürlich erscheinen mag, folgt einer gewissen Sachlogik, da der Parameter vor der Variable x in der allgemeinen Funktionsgleichung des Sinus Auswirkung auf die Frequenz und damit auf die Periodendauer hat. Janas Vorgehen legt also die Vermutung nahe, dass sie einen Zusammenhang zwischen dem Parameter und der Frequenz erkennt, aber nicht mehr genau weiß, wie sich eine Änderung auf die Periodendauer der Funktion auswirkt. Anschließend stellen sich Jana und Melanie zwei Fragen in ihrem Modellierungsprozess: Wie sollen die Koordinatenachsen gewählt werden? Und soll die Dämpfung der Schwingung in den Modellierungsprozess miteinbezogen werden? Bei der Wahl der Achsen verfolgen Melanie und Jana unterschiedliche Ziele. Jana möchte den Sachverhalt möglichst realitätsnah

abbilden und wählt eine x-Achse unterhalb des Funktionsgraphen, so dass die Modellfunktion nur positive Werte annimmt. Diese entsprechen dem Abstand vom Gewichtsstück zur Tischplatte. Jana schlägt hingegen vor, die x-Achse so zu wählen, dass sie den Graphen der Sinusfunktion schneidet. Dadurch wird der Modellierungsprozess mathematisch vereinfacht, da der d Parameter in der Funktionsgleichung $g(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c))$ gleich 0 wäre.

Janas Manipulation des Funktionsterms kann auf mindestens zwei unterschiedliche Arten interpretiert werden. Sie verändert den Funktionsterm der Sinusfunktion, indem sie den Parameter b gleich 71,8 setzt. Diese Handlung lässt sich zum einen mit der Objektvorstellung erklären – Jana operiert am symbolischen Objekt – zum anderen kann die Kovariationsvorstellung miteinbezogen werden – Jana untersucht wie sich die Änderung des Parameters auf den Funktionsgraphen auswirkt. In diesem Kontext wird die Kovariationsvorstellung allerdings nicht im klassischen Sinne verwendet, um zu erklären, wie sich der Funktionswert im Wertebereich einer Funktion in Abhängigkeit des Argumentes verändert, sondern, um zu erklären, wie sich die Funktion innerhalb einer Funktionsklasse in Abhängigkeit eines Parameters ändert. Man kann in diesem Sinne von einer Kovariationsvorstellung zweiten Grades sprechen. Es zeigt sich allerdings, dass ohne geeignetes Grundwissen über trigonometrische Funktionen das Aufstellen einer geeigneten Modellfunktion nicht gelingen kann. Jana fehlt die Einsicht, wie sich der Faktor auf die Periode der Sinusfunktion auswirkt.

Jana und Melanie – Aufgabe 3 – Szene 2

```
50 Jana:      Ja okay. Also sollen wir eigentlich in den Sinus
51            diese Zeit einbauen. Das wir also, sagen wir mal
52            hier starten.[zeigt auf die Nullstelle der Sinus-
53            kurve] Nee, lass uns das nach unten verschieben
54            [zeigt auf den Tiefpunkt der Sinuskurve] und dann
55            so. Das ist ein Pi, ne? [zeigt auf den Abstand
56            zwischen zwei Tiefpunkten] Ein Pi soll dann sie-
57            ben eins Komma acht Millisekunden brauchen.
58 Melanie:   Ja also hat sie die Periode zwei Mal das hier
59            [zeigt auf den Wert 71,8] oder nicht? Also weil
60            wenn wir eine...also eine Periode wäre ja quasi
61            einmal das...[zeichnet in der Luft die Periode der
62            Sinuskurve nach] nee das passt hier gerade
63            nicht...[7 Sekunden Pause]
```

```
64 Jana:      Jetzt müssen wir mal den Sinus direkt angucken.
65            Der beginnt hier unten. [zeichnet die Skizze einer
66            Welle] So und von hier bis da ist eine. [zeigt von
67            einem Wendepunkt zum übernächsten]
68 Melanie:   Das sind zwei Pi.
69 Jana:      So wir starten jetzt von da bis da. [zeigt auf den
70            Tiefpunkt der Skizze]
71 Melanie:   Wären auch zwei Pi.
72 Jana:      Sind auch zwei Pi.
73 Melanie:   Das heißt das Ganze hat bei uns die Periode. Das
74            da...[zeigt auf den Wert 71,8]
75 Jana:      Ja... was ist dann jetzt die Funktion?
```

Jana beginnt die Szene mit der Frage wie sie „in den Sinus diese Zeit einbauen" (50–51) können. Sie überlegt zunächst, wo in der Skizze der Startpunkt der Sinuskurve sein könnte, und zeigt auf eine Nullstelle. Kurz darauf entscheidet sie sich um: „Nee, lass uns das nach unten verschieben" (53) und zeigt auf den Tiefpunkt der Sinuskurve. Sie zeigt auf den Abstand zwischen zwei Tiefpunkten und fragt „das ist ein Pi, ne?" (55) und ergänzt „ein Pi soll dann sieben eins Komma acht Millisekunden brauchen" (56–57). Melanie greift die Argumentation auf, deutet auf dem Zettel auf den Wert und sagt „also hat sie die Periode zwei Mal das hier" (58). Sie begründet ihre Aussage mit den Worten „eine Periode wäre ja quasi einmal das" (60–61), während sie mit ihrem Stift eine Periode der Sinuskurve in die Luft zeichnet. Sie fängt an zu überlegen und bemerkt „nee, das passt hier gerade nicht" (62–63). Es folgen sieben Sekunden der Stille, in denen Melanie mehrfach eine Periode der Sinuskurve in die Luft zeichnet. Jana bricht das Schweigen und sagt „jetzt müssen wir mal den Sinus direkt angucken" (64) und fängt an, eine neue Sinuskurve zu zeichnen. Jana beginnt mit einem Koordinatensystem und zeichnet eine Sinuskurve, die am Ursprung des Koordinatensystems beginnt: „Der beginnt hier unten" (65). Das Stück des Graphen links vom Ursprung wird erst nachträglich eingezeichnet. Sie zeigt auf die Nullstelle im Ursprung und auf die Nullstelle bei und sagt „So, von hier bis da ist eine" (66). Melanie ergänzt: „Das sind zwei Pi" (68). Melanie kommentiert ihre Zeichnung „So wir starten jetzt von da bis da" (69) und zeigt auf den Tiefpunkt $\frac{3}{2}\pi$ bei und $\frac{7}{2}\pi$. Melanie und Jana sind sich einig, dass diese auch voneinander entfernt sind. Jana schließt damit, dass dieser Abstand dem Wert 71,8 entsprechen muss.

Um den Wert 71,8 formal in die Sinusfunktion *einzubauen*, widmen sich Jana und Melanie zunächst der Frage, wie dieser Wert anschaulich am Funktionsgraphen gedeutet werden kann. Dabei vergleichen sie den Wert mit der Periode der Sinusfunktion. In ihrer Erklärung folgert Jana fälschlicherweise, dass der Abstand von einem Tiefpunkt der Sinusfunktion zur nächsten genau π beträgt; Richtig wären 2π gewesen. Wie lässt sich dieser Fehler erklären? In der Zeit von einer

Nullstelle zur Nächsten durchläuft die Sinusfunktion eine halbe Periode. Der Verlauf des Funktionsgraphen wiederholt sich erst ab der zweiten Nullstelle. Jana könnte diese Argumentation auf Tiefpunkte übertragen haben. Dementsprechend würde folgen, dass die Sinusfunktion von einem Tiefpunkt zum nächsten eine halbe Periode durchlaufen hat. Es handelt sich also in gewisser Weise um eine Übergeneralisierung des Arguments.

Melanie fällt dieser Fehler zunächst nicht auf. Janas Logik folgend, schlussfolgert sie, dass die Periode der Modellfunktion insgesamt $2 \cdot 71,8$ betragen muss. Was könnte Melanie nun durch den Kopf gehen? Wenn Janas Aussage stimmt und der Abstand von einem Tiefpunkt zum nächsten gleich π ist, dann muss π in der Modellfunktion 71,8 entsprechen. Da die Sinusfunktion eine Periode $2 \cdot \pi$ von hat, hat die Modellfunktion dementsprechend eine Periode von $2 \cdot 71,8$. Erst dadurch, dass Melanie eine Periode der Sinusfunktion in die Luft zeichnet, erkennt sie, dass etwas nicht stimmt. Um sich Klarheit zu verschaffen, zeichnet Jana eine Sinusfunktion auf und vergleicht den Abschnitt von einer Nullstelle bis zur Übernächsten mit dem Abschnitt von einem Tiefpunkt bis zum Nächsten. Indem sie scheinbar gedanklich die Abschnitte ineinander überführt, merkt sie, dass diese die gleiche Länge haben.

Jana und Melanie – Aufgabe 3 – Szene 3

76	**Melanie:**	Fangen wir mal an. [lacht] Ähm... [14 Sekunden
77		Pause] Also bei x ist ja die Zeit, das heißt wir
78		hätten doch... [zeichnet eine neue Sinuskurve]
79	**Jana:**	[flüstert] Wir können auch t hinschreiben.
80		[schreibt t an die x-Achse]
81	**Melanie:**	t mal und müssten wir dann die eigentliche Periode
82		durch unsere jetzt neue Periode irgendwie teilen?
83		Damit das hinkommt oder malnehmen [Pause von 7
84		Sekunden]
85	**Jana:**	Also ich tendiere zu mal, aber ich bin mir
86		nicht...
87	**Melanie:**	Aber ich meine wir wollen es ja auf die neue Peri-
88		ode eigentlich runterskalieren... Wenn wir
89		jetzt... zwei Pi mal einundsiebzig Komma acht Mil-
90		lisekunden rechnen, dann hätten wir ja eine Peri-
91		ode die größer wäre eigentlich, oder?
92	**Jana:**	Aber wir nehmen, wir packen in den Sinus t, also
93		ein t im Grunde genommen rein und wenn wir die
94		jetzt mal, äh, quatsch 71,8. t ist ja...
95	**Melanie:**	Was meinst du? Kannst du das mal hinschreiben?

Nachdem Melanie und Jana geklärt haben, wie der Wert anschaulich am Funktionsgraphen gedeutet werden kann, zeichnet Melanie eine neue Sinuskurve. Sie beschäftigen sich nun damit, wie dieser Wert formal in den Funktionsterm eingebaut wird. Melanie fragt Jana, ob die „eigentliche Periode" (81) durch die „jetzt neue Periode" (82) geteilt werden soll – wodurch der Faktor $\frac{2\pi}{71,8}$ entstehen würde – oder ob sie die Werte „malnehmen" (83) sollen, was zu dem Faktor $2\pi \cdot 71,8$ führen würde. Jana tendiert dazu, die Werte zu multiplizieren, woraufhin Melanie einwirft, dass sie die „neue Periode eigentlich runterskalieren" (87–88) wollen. Melanie fragt daraufhin „Wenn wir jetzt … zwei Pi mal einundsiebzig Komma acht Millisekunden rechnen, dann hätten wir ja eine Periode die größer wäre eigentlich, oder?" (88–91).

In dieser Szene äußert Melanie die Vermutung, dass eine Multiplikation von 2π mit dem Faktor 71,8 die Periode der Funktion vergrößern würden. Wie lässt sich diese Vermutung erklären? Die Bestimmung des Parameters b, der sich in einem Funktionsterm $f(b \cdot x)$ vor der Variable x befindet, gehört zu dem Kanon schulischer Modellierungsaufgaben und hängt mit der Objektvorstellung einer Funktion zusammen. Oft geht dabei die Frage einher, ob der Funktionsgraph in x-Richtung gestaucht oder gestreckt werden soll. Dabei tauchen bei den Schülerinnen und Schülern oft Verwechslungen zwischen $\cdot$ und $\div$ auf. Dahinter könnte die Vermutung stecken, dass Multiplizieren vergrößert und damit der Graph in die Breite gestreckt wird, wohingegen die Division verkleinert und der Graph dadurch zusammengestaucht wird. Im Fall von Jana und Melanie steht in dieser Szene zunächst nicht die Frage im Vordergrund, wie der Funktionsgraph gestaucht wird, sondern, wie die Periode verkleinert werden kann. Auch hier entscheidet sich Melanie zunächst dafür, die Division zu nutzen, und knüpft damit möglicherweise an die Vorstellung an, dass die Division verkleinert.

Jana und Melanie – Aufgabe 3 – Szene 4

```
96 Jana:      Nein warte, also wir schreiben hier ja auf jeden
97            Fall ein t rein, ne? In den Sinus. So, wenn t zwei
98            Pi ist, soll es durch sein. Aber in diesem Fall
99            haben wir ja eine Periode, t gleich... nee, wenn t
100           eins, nee einundsiebzig Komma acht ist...[schreibt
101           eine Gleichung auf den Zettel] Dann muss f von t..
102 Melanie:  f von t müsste dann ...
```

103 **Jana:** [sucht eine Stelle auf dem Funktionsgraphen] da
104 sein, bei null. [zeigt auf die Nullstelle der Si-
105 nusfunktion bei 2π] Genau so soll ja f von null,
106 null sein... weil wir ja hier bei null null star-
107 ten. Wir skalieren es ja runter. So wie müssten
108 wir hier überhaupt Minus rechnen, damit wir da un-
109 ten starten [zeigt auf die Nullstelle] beziehungs-
110 weise wie müssten wir das verschieben, wir müssten
111 es ja um...
112 **Melanie:** Um, also ich meine das hier sind ja unsere [zeigt
113 auf den Hochpunkt der Skizze] sechzehn Komma fünf
114 drüber und das hier sind...
115 Die zehn Komma fünf über dem Tisch. [zeigt auf
116 eine Nullstelle der skizzierten Welle] Das heißt,
117 der Unterschied ist sechs und die Hälfte davon
118 wäre drei weil normalerweise starten wir ja da.
119 [zeigt auf einen Tiefpunkt der Sinusfunktion] Das
120 heißt wir müssten einfach drei weiter unten star-
121 ten.
122 **Jana:** Aber wenn wir drei weiter unten starten, wären wir
123 ja einfach hier. [zeichnet einen Funktionsgraphen
124 parallel zum ursprünglichen Funktionsgraphen] Wir
125 müssen es ja auch noch ein Stück nach rechts ver-
126 schieben, damit wir in null null sind. So wäre ja
127 einfach nur minus drei aber wir wollen ja äh...das
128 so haben. [zeichnet einen Pfeil vom Tiefpunkt zum
129 Nullpunkt] Weil sonst wären wir ja hier und dann
130 müssen wir es ja noch ein Stück nach rechts ver-
131 schieben. Das heißt, hier muss auch noch minus
132 rein. Minus ähm... das Stück hier wieviel Pi sind
133 das ein halb Pi, ne?
134 **Melanie:** Mhm.
135 **Jana:** Also müsste das auf jeden Fall Sinus...ich schreib
136 jetzt einfach mal a t Minus ein halb Pi minus drei
137 sein.

In dieser Szene überlegt Jana, wie der Faktor vor der Variable x zu wählen ist, damit die Modellfunktion eine Periode von 71,8 Millisekunden hat. Dazu wertet sie die Modellfunktion an den Stellen t = 71,8 und t = 0 aus und setzt beide Male den Funktionswert auf (vgl. Abbildung 6.9). Sie begründet diese Funktionswerte mit dem Kommentar „wir skalieren es ja runter“ (107).

Jana stellt anschließend die Frage „Wie müssten wir hier überhaupt Minus rechnen, damit wir da unten starten“ (107–109) und zeigt auf die Nullstelle

Abbildung 6.9 Notizen von Jana

$t = 71{,}8$ msek

$f(t) = 0$

$f(0) = 0$

im Ursprungs des Koordinatensystems (vgl. Abbildung 6.10). Melanie beginnt nun damit, den Abstand zwischen der Höhe des Gewichtsstückes am Hochpunkt und der Höhe im Ruhezustand zu bestimmen. Sie erhält einen Wert von cm und halbiert diesen anschließend: „Das heißt, der Unterschied ist sechs und die Hälfte davon wäre drei weil normalerweise starten wir ja da“ (116–118) und zeigt auf den Tiefpunkt der Funktion. Sie schließt, dass sie „einfach drei weiter unten starten“ (120–121). Jana zeichnet daraufhin eine Funktion parallel zur Ursprungsfunktion, die ein Stück entlang der y-Achse nach oben verschoben ist (vgl. Abbildung 6.10).

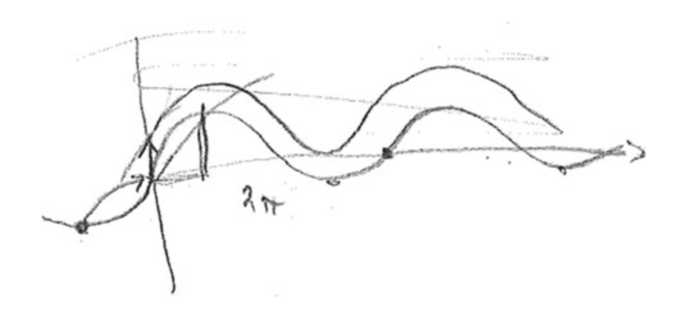


Abbildung 6.10 Skizze von Jana

Jana erklärt Melanie, dass die von ihr vorgeschlagene Verschiebung nicht ausreicht: „Wir müssen es ja auch noch ein Stück nach rechts verschieben, damit wir in null null sind.“ (124–126). Um zu verdeutlichen was Jana meint, zeichnet sie einen Pfeil vom Tiefpunkt zum Ursprung des Koordinatensystems (vgl. Abbildung 6.10). Diese Verschiebung nach rechts erreicht Jana, indem sie von der Variable x den Wert $\frac{\pi}{2}$ abzieht: „Das heißt hier muss auch noch minus rein. Minus ähm… das Stück hier wieviel Pi sind das ein halb Pi, ne?“ (131–133). Sie

gelangt so zu der vorläufigen Gleichung

$$\sin\left(a \cdot t - \frac{1}{2}\pi\right) + 3$$

Insgesamt vermischen sich in dieser Szene drei Operationen am Funktionsgraphen, die von den Gesprächspartnern unterschiedlich interpretiert und verstanden werden:

1. Stauchung/Streckung des Funktionsgraphen entlang der x-Achse
2. Verschiebung in y-Richtung
3. Verschiebung in x-Richtung

Jana versucht zunächst die Periodenlänge der Modellfunktion anzupassen, was einer Stauchung des Funktionsgraphen entspricht. Dazu stellt sie Gleichungen auf und versucht das Problem im algebraischen Register zu lösen (vgl. Abbildung 6.9). Als sie nicht weiterkommt, orientiert sie sich am Funktionsgraphen der Sinusfunktion. Ihr Kommentar „wir skalieren es ja runter" (107) lässt vermuten, dass sie eine Verschiebung entlang der y-Achse meint. Jana bezieht sich damit auf die Diskussion aus Szene 1, ob die x-Achse unterhalb des Funktionsgraphen verläuft oder durch ihn hindurch. Zur Erinnerung: *Jana wollte, dass der Funktionsgraph oberhalb der x-Achse verläuft, hat sich nun aber darauf eingelassen, ihn nach unten zu verschieben.* Im Anschluss darauf fragt Jana, wie sie den Graphen verschieben müssen um unten zu starten. An dieser Stelle kann angenommen werden, dass sie sowohl eine Verschiebung in y-Richtung als auch eine Verschiebung in x-Richtung meint, sodass der Tiefpunkt der Sinusfunktion genau im Ursprung des Koordinatensystems liegt. Melanie versteht darunter vermutlich eher die Frage, wie der Funktionsgraph entlang der y-Achse verschoben werden muss. Dabei bestimmt sie den Wert der Amplitude und halbiert diesen. Zuletzt lenkt Jana ein und versucht Melanie zu erklären, dass sie eine Verschiebung in y-Richtung beabsichtigt hat. Zwar wurde der Wert der Amplitude von Melanie falsch bestimmt – sie erhält 3, es müssten aber 6 sein – dennoch schaffen es beide, die Werte entsprechend ihrer Überlegung in den Funktionsterm einzubauen. Um den Graphen nach oben zu verschieben, addieren sie den Wert 3 und um den Graphen nach rechts zu verschieben, subtrahieren sie den Wert $\frac{1}{2}\pi$ von der Variable x.

Jana und Melanie – Aufgabe 3 – Szene 5

```
[Die Zeilen 138-146 des Transkripts wurden ausgespart]
147 Melanie:  Ja jetzt bin ich bei dir. Okay jetzt ist nur die
148           Frage...
149 Jana:     Was ist a?
150 Melanie:  Genau...
151 Jana:     So und das könnten wir doch jetzt hiermit machen
152           oder nicht? [zeigt auf die vorher aufgestellten
153           Gleichungen] Wenn wir dafür t null einsetzen, sind
154           wir nicht bei null...weil Sinus von minus ein halb
155           Pi ist definitiv nicht drei.
156 Melanie:  [lacht] Ja. [Pause 10 Sekunden] Vielleicht...
157           [Pause 4 Sekunden] wollen wir doch hier starten
158           [zeigt auf die x-Achse der Sinuskurve] weil die
159           Zeit von hier nach da [zeigt von einem Hochpunkt
160           zum Nächsten] und von da nach da [zeigt von einer
161           Nullstelle zur Übernächsten] sollte ja die gleiche
162           sein.
163 Jana:     Ja.
164 Melanie:  Dann müssten wir uns zumindest um das drei um die
165           Verschiebung keine Gedanken machen.
166 Jana:     Ich streiche das mal kurz durch. Ähm also, nochmal
167           die neue Skizze.
168 Melanie:  Wir nehmen jetzt einfach den normalen Sinus.
169 Jana:     Okay. [zeichnet] Von da bis.... Nee, Quatsch.
170 Melanie:  Von da bis da sollen es 71 Komma 8 Millisekunden
171           sein... Also das was eigentlich theoretisch unsere
172           zwei Pi sind.
173 Jana:     So, das heißt wir können die Verschiebung komplett
174           lassen. Wir nehmen einfach nur Sinus a t.
175 Melanie:  Müssen nur jetzt gucken wie wir genau a wählen.
176 Jana:     Ja aber das ist doch dann jetzt einfach weil wenn
177           wir da jetzt für t null einsetzen, haben wir Sinus
178           von null. Das ist auf jeden Fall null. Das passt
179           und wenn wir da jetzt für t einundsiebzig Komma
180           acht einsetzen, ähm dann haben wir null gleich
181           Sinus von einundsiebzig Komma acht a. Arcussinus
182           von null?
```

183 **Melanie:** Weiß ich nicht. Äh, ich meine man kann es doch
184 einfach. Ich glaube, warte, ich denke mal kurz für
185 mich. Bevor ich irgendwelche Ideen auftische.
186 [fängt an zu schreiben] Das müsste doch passen
187 oder nicht, weil wenn wir jetzt...
188 **Jana:** Dann ist da Sinus zwei t P. Ja das könnte passen.
189 **Melanie:** Weil wenn wir hier jetzt einundsiebzig Komma acht
190 einsetzen, dann kürzt sich das hier wieder raus
191 und wir wären bei zwei Pi das wäre null, also dass
192 wir die Periode skalieren.
193 **Jana:** Ja machen wir es so. Also haben wir...
194 **Melanie:** Okay, also kreuzen wir einfach hier ein, das ist
195 das Endergebnis. Oder nee, warte.
196 **Jana:** Wir schreiben es einfach noch f von t ist dann
197 gleich Sinus von zwei Pi durch einundsiebzig Komma
198 acht Mal t.

In der letzten Szene widmen sich Jana und Melanie erneut der Bestimmung des Parameters a, in der von ihnen aufgestellten Gleichung $f(t) = \sin\left(a \cdot t - \frac{1}{2}\pi\right) + 3$. Jana schlägt vor: „So und das könnten wir doch jetzt hiermit machen oder nicht?" (151–152) und zieht ihre vorher aufgestellten Gleichungen zur Rate (vgl. Abbildung 6.9). Ihr Versuch scheitert „weil Sinus von minus einhalb Pi ist definitiv nicht drei" (154–155). Jana und Melanie überlegen eine Weile, ehe Melanie vorschlägt doch auf der x-Achse zu starten. Die Zeit von einem Hochpunkt zum nächsten sei dieselbe wie von einer Nullstelle zur übernächsten. So müssten sich die beiden „zumindest um das drei um die Verschiebung keine Gedanken machen" (164–165). Jana streicht die alte Skizze durch (vgl. Abbildung 6.8) und fertigt eine neue an (vgl. Abbildung 6.11), in dem sie „jetzt einfach den normalen Sinus" (168) nehmen.

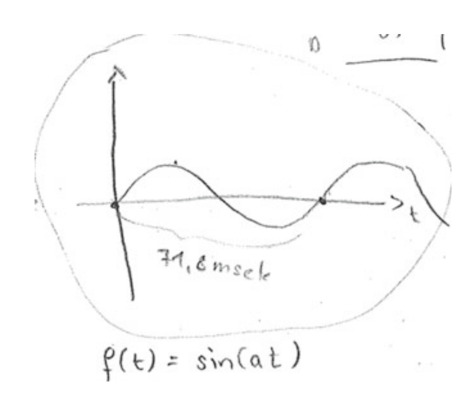


Abbildung 6.11
Modellfunktion ohne Verschiebung

Indem Jana und Melanie „die Verschiebung komplett lassen“ (173–174), ist es Jana nun möglich, ihre Gleichungen wieder zu benutzen. Sie formt die Gleichungen um, um an zu gelangen (vgl. Abbildung 6.12). Zur Lösung fehlt ihr nur noch der „Arcussinus von null“ (181–182).

Abbildung 6.12 Janas Umformung der Gleichung

$$0 = \sin(71{,}8a)$$

$$a = \frac{\arcsin(0)}{71{,}8} = \frac{2\pi}{71{,}8}$$

Melanie weiß den Wert des Arcussinus nicht und bittet um ein bisschen Bedenkzeit „bevor ich irgendwelche Ideen auftische“ (185). Nach acht Sekunden schreibt sie die Formel $f(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{71{,}8} \cdot t\right)$ auf. Als Begründung liefert sie: „weil wenn wir hier jetzt einundsiebzig Komma acht einsetzen, dann kürzt sich das hier wieder raus und wir wären bei zwei Pi das wäre null, also dass wir die Periode skalieren“ (189–192).

In dieser Szene einigen sich Melanie und Jana darauf, den Modellierungsprozess zu vereinfachen, indem sie die Verschiebung des Funktionsgraphen entlang der x-Achse und entlang der y-Achse außer Acht lassen. Dies geschieht wahrscheinlich aufgrund des Widerspruchs, der sich aus der aufgestellten Gleichung $f(t) = \sin\left(a \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) + 3$ und den Bedingungen $f(0) = 0$ und $f(71,8) = 0$ ergibt. Dieser Widerspruch hätte aufgelöst werden können, indem Melanie und Jana die Amplitude der Sinusfunktion in ihre Überlegung mit einbezogen hätten. Bei korrekter Klammersetzung und dem Faktor 3 vor dem Term $\sin\left(a \cdot \left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ wäre kein Widerspruch erzeugt worden. Stattdessen einigen sich Jana und Melanie darauf, die Verschiebung in $x-$ und y-Achse zu ignorieren, wodurch der Modellierungsprozess mathematisch vereinfacht wird. Abschließend bleibt für Jana und Melanie nur noch zu klären, wie sie auf den Faktor $\frac{2\pi}{71{,}8}$ kommen. Jana argumentiert im Sinne der Zuordnungsvorstellung: Sie macht die Probe, setzt den für x den Wert $71,8$ ein und erhält $f(71,8) = 0$. Dieser Funktionswert stimmt mit ihren Vermutungen überein, weshalb sie zu dem Schluss kommt, dass der Faktor korrekt ist. Diese Argumentation ist in gewisser Weise sehr statisch, da sie sich auf einen bestimmten Wert fokussiert. Alternativ wäre es möglich gewesen im Sinne der Kovariationsvorstellung zu argumentieren. In diesem Fall müsste jedoch nicht das klassische Änderungsverhalten zwischen Argument und Funktionswert einer Funktion untersucht werden, sondern das Änderungsverhalten zwischen Parameter und Funktionsgraphen innerhalb einer Funktionsklasse.

So gesehen stellt diese Sichtweise ein Kovariationsverhalten höherer Ordnung dar. Gemäß dieser Perspektive könnte die Argumentation wie folgt lauten: Die Sinusfunktion hat eine Periode von 2π, multipliziert man die Variable x mit dem Faktor 2π wird die Funktion in x-Richtung gestaucht. Durchläuft x die Werte von 0 bis 1, wertet die Sinusfunktion alle Werte 0 von bis 2π aus. Die neue Funktion hat also eine Periode von 1. Wird nun ein weiterer Faktor $\frac{1}{71{,}8}$ von an die Variable multipliziert, wird die Funktion in x-Richtung gestreckt. Durchläuft x die Werte von 0 bis 71,8 wertet die Sinusfunktion alle Werte von 0 bis 2π aus. Die neue Funktion hat also eine Periode von 71,8.

6.3.3 Zusammenfassung – Aufgabe 3

Die Handlungen und Denkprozesse der Studierenden lassen sich in beiden Fallstudien zum Teil mit Hilfe allgemeiner funktionaler Grundvorstellungen erklären beziehungsweise rekonstruieren. Zieht man die Objektvorstellung einer Funktion zur Rate, kann zum Beispiel in der Variation der Parameter eines Funktionsterms eine mathematische Operation mit symbolischen Objekten erkannt werden. Auch das Verschieben, Strecken oder Stauchen des Funktionsgraphen kann auf diese Weise gedeutet werden. Bezieht man sich hingegen auf die Kovariationsvorstellung, kann man in dieser Handlung eine Kovariation auf höherer Ebene erkennen, nämlich ein Änderungsverhalten zwischen einem Parameter und dem Funktionsgraphen innerhalb einer Funktionsklasse. Es ist im Bearbeitungsprozess von Lisa und Alexander weiterhin zu sehen, dass diese funktionalen Vorstellungen des Sinus nur vernünftig zum Tragen kommen können, wenn entsprechendes Grundwissen über trigonometrische Funktionen vorhanden ist. Dieses Grundwissen entspricht dem spezifischen technischen Wissen, das der *Funktionsvorstellung des Sinus* zugeordnet werden kann (vgl. Abschnitt 4.6.6), und ist notwendig, um auf formaler Ebene sinnvoll mit der Sinusfunktion umgehen zu können. Die Funktionsvorstellung des Sinus ist eine innermathematische Grundvorstellung, bei der die Sinusfunktion Bedeutung durch ihre analytischen Eigenschaften erlangt.

Daneben spielt in dieser Aufgabe die *Oszillationsvorstellung* eine Rolle, welche sich bei den Zuordnungsprozessen zwischen Realsituation und Funktionsterm zeigt. Diese Zuordnungsprozesse haben bei Kontexten, in denen die Sinusfunktion verwendet wird, – im Gegensatz zur Parabel – neue und deutlich komplexere Anforderungen. In Hinblick auf den Modellierungsprozess zeigen sich bei Lisa und Alexander deutliche Wissensdefizite im Verständnis des Schwingungsprozesses. Diese Defizite führen dazu, dass ihre Modellierungsversuche scheitern.

Bevor sie die Aufgabe lösen können, müssen sie sich beispielsweise allmählich erarbeiten, dass die Schwingung des Federpendels in beide Richtungen gleich weit schwingt. Dies zeigt, dass die Kenntnis wesentlicher Begriffe und Eigenschaften periodischer Prozesse erforderlich sind, um diese in geeigneter Weise zu modellieren. Es sind genau diese Kenntnisse, welche die Basis zum Aufbau der Oszillationsvorstellung des Sinus bilden (vgl. Abschnitt 4.6.5) und dabei helfen, die korrekten Entscheidungen im Modellierungsprozess zu treffen. Welche Annahmen getroffen werden müssen und wie dieses Wissen in den Modellierungsprozess eingebunden wird, zeigt sich bei Jana und Melanie. Sie sind in einem stetigen Aushandlungsprozess über geeignete Annahmen, dabei geht es zum Beispiel um die Wahl des Koordinatensystems, die Dämpfung der Schwingung und die Wahl des Startzeitpunktes. Diese Überlegungen sind charakteristisch für oszillierende Vorgänge und unterscheiden sich dadurch von anderen Funktionsklassen.

6.4 Beantwortung der Forschungsfragen

Es werden nun die zu Beginn von Kapitel 6 gestellten Forschungsfragen beantwortet. Die Antworten darauf ergeben sich aus den Auswertungen der Videoanalysen.

Forschungsfrage 1: Welche charakteristischen Denkmuster lassen sich beim Arbeiten an ausgewählten Problemaufgaben zum Sinusbegriff erkennen?
In der Analyse der Transkripte lässt sich eine Vielzahl unterschiedlicher mathematischer Konzepte und Vorstellungen ausmachen, die in direktem oder indirektem Zusammenhang mit dem Sinusbegriff stehen und zur Lösung der gegebenen Aufgaben von den Studierenden genutzt werden. So spielen beispielsweise bei der Bearbeitung der ersten Aufgabe am rechtwinkligen Dreieck Aspekte des Bruchzahlbegriffs eine Rolle. In Aufgabe 2 wird deutlich, welche Signifikanz der erste Quadrant als Standardposition für die Lage des Referenzdreiecks hat und wie wichtig die Symmetrieeigenschaften des Einheitskreises bei der Lösung des Problems sind. Bei der Modellierung periodischer Prozesse nutzen die Studierenden außerdem Grundkenntnisse über Funktionen, die im Zusammenhang zur Objektvorstellung und zur Kovariationsvorstellung stehen. Auf diese Zusammenhänge wird im Folgenden detailliert eingegangen:

Aspekte des Verhältnisbegriffs: In Aufgabe 1 soll das Änderungsverhalten der Sinusfunktion im Intervall $(0°, 90°)$ am rechtwinkligen Dreieck erläutert werden.

Bei der Darstellung der Sinusfunktion am rechtwinkligen Dreieck bezeichnet $\sin(\alpha)$ das Seitenverhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse, das meist durch einen Bruch der Form $\frac{a}{c}$ dargestellt wird. Der Bruchzahlbegriff selbst ist Gegenstand weitreichender empirischer und theoretischer Forschung (Schulz & Wartha 2011; Padberg & Wartha 2017; Kollhoff 2021) und stellt aus didaktischer Sicht ein äußerst umfangreiches Konzept dar. Durch die Menge an unterschiedlichen Sachzusammenhängen, in denen der Bruchzahlbegriff Anwendung findet, lassen sich eine Reihe normativer Grundvorstellungen formulieren, die im Umgang mit der Sinusfunktion relevant sind. Diese Tatsache deutet darauf hin, dass ein ausgeprägtes Grundverständnis zum Sinusbegriff auch Aspekte des Bruchzahlbegriffs miteinbezieht.

Im Bearbeitungsprozess von Janine und Tim zu Aufgabe 1 zeigt sich eindrücklich wie wichtig entsprechende Deutungen des Bruchzahlbegriffs bei der Arbeit mit dem Sinus sind: Tim stolpert in seinem Denkprozess über unterschiedliche Vorstellungen zum Bruchzahlbegriff. Er spricht über den Sinus als Ergebnis einer Division „Gegenkathete zu Hypotenuse“ und fragt sich anschließend, was das über das „Verhältnis“ aussagt. Es ist an dieser Stelle zu erkennen, dass diese beiden Deutungen des Bruchzahlbegriffs für Tim scheinbar entkoppelt voneinander sind und er somit nicht den nötigen Schritt zur Lösung des Problems gehen kann. Mit der Hilfe seiner Partnerin begreift er schließlich, dass es sich bei dem Verhältnis und der Division um den gleichen mathematischen Gegenstand handelt.

Problemlösekompetenzen am Einheitskreis: In den Bearbeitungsprozessen zu Aufgabe 2 lassen sich bei den Studierenden allgemeine Problemlösekompetenzen erkennen. Diese zeigen sich zum Beispiel im Vereinfachen des Problems. In beiden Fallstudien findet diese Vereinfachung statt, indem Symmetrieeigenschaften des Einheitskreises genutzt werden: Statt das Problem für den gegebenen Winkel α zu lösen, der zu dem Punkt p auf dem Einheitskreis im dritten Quadranten gehört, transferieren beide Paare den Sachverhalt in den ersten Quadranten und schauen sich das Problem für den Winkel $\alpha - 180°$ an. Dieses Vorgehen hängt vermutlich damit zusammen, dass das Referenzdreieck in der Schule im ersten Quadranten eingeführt wird und dort keine gerichteten Längen auftauchen. Außerdem ist es für einen Winkel $\alpha \in (0°, 90°)$ eindeutig, was mit der Gegenkathete und der Ankathete des Referenzdreiecks gemeint ist. Sobald die Winkelgröße jedoch den Wert 90° übersteigt, ist es nicht mehr derart offensichtlich. Eine weitere Problemlösekompetenz zeigt sich in der Betrachtung von Spezialfällen, dazu untersuchen Janine und Tim die Fälle $\alpha = 0°$ und $\alpha = 90°$. Leider führt dieser Ansatz nicht zu dem gewünschten Ergebnis, da in diesen Spezialfällen das Referenzdreieck verschwindet.

Allgemeine funktionale Grundvorstellungen: Im Umgang mit der Sinusfunktion nutzen Lernende allgemeine funktionale Grundvorstellungen, die auf viele

Funktionsklassen gleichermaßen angewendet werden können. Dazu zählen die Zuordnungsvorstellung, die Kovariationsvorstellung und die Objektvorstellung (vgl. Abschnitt 3.2). Diese Grundvorstellungen klassifizieren aus normativer Perspektive allgemeine Denk- und Handlungsweisen mit funktionalen Objekten. In den Videoanalysen lassen sich diese normativen Kategorien dazu nutzen, die Denkprozesse der Studierenden zu rekonstruieren, die für die Sinusfunktion charakteristisch sind.

In Aufgabe 2 lassen sich im Denken der Studierenden Aspekte der Zuordnungsvorstellung wiederfinden. Am rechtwinkligen Dreieck findet die Zuordnung des Sinus zwischen einem Winkel und dem entsprechenden Seitenverhältnis statt. Diese sinusspezifische Zuordnungsvorstellung findet sich sowohl an beliebigen rechtwinkligen Dreiecken als auch am Einheitskreis wieder, dort nimmt sie Form an, indem ein Referenzdreieck in den Einheitskreis eingezeichnet wird. Im Bearbeitungsprozess von Janine und Tim wird deutlich, dass dieses Referenzdreieck und das entsprechende Verhältnis für Tim notwendig sind, um dem Sinus eine Bedeutung beizumessen. Bei Larissa und Veronika ist die Zuordnungsvorstellung am Referenzdreieck etwas anders gelagert: Sie thematisieren das Verhältnis nicht mehr, sondern ordnen dem Winkel direkt die gerichtete Seitenlänge der Gegenkathete zu. Eine weitere Erscheinungsform der Zuordnungsvorstellung ist bei Janine und Tim in Szene 1 zu sehen. Dort spricht Janine davon, dass der Sinus der y-Koordinate des Punktes p auf dem Einheitskreis entspricht, was mit der Definition des Sinus am Einheitskreis übereinstimmt. Damit zeigt sich die Zuordnungsvorstellung am Einheitskreis in zwei unterschiedlichen Weisen: als Seite im Referenzdreieck und als y-Koordinate eines Punktes. Das dominante Erklärungsmodell bezieht sich in beiden Fällen auf das Referenzdreieck. Dabei entstehen Schwierigkeiten, die in der Beantwortung der dritten Forschungsfrage erläutert werden.

In Aufgabe 1 liegt der Schwerpunkt auf der Kovariationsvorstellung: Es soll gezeigt werden, dass $f(\alpha) = \sin(\alpha)$ auf dem Intervall $(0°, 90°)$ monoton wächst. In der Aufgabenstellung wird direkt auf die Darstellung des Sinus am rechtwinkligen Dreieck verwiesen und dazu aufgefordert, den Sachverhalt dort zu begründen. Das Kovariationsverhalten kann allerdings an allen drei Darstellungen – Funktionsgraph, Einheitskreis und rechtwinkliges Dreieck – erläutert werden. Als dominantes Erklärungsmodell zeigt sich in diesem Kontext die Darstellung am Funktionsgraphen. Dazu reicht den Studierenden ein Verweis auf die Sinusfunktion aus, um die Vermutung zu bestätigen, dass die Funktion tatsächlich monoton wächst. Es handelt sich auf dieser Darstellungsebene für die Studierenden um gesichertes Wissen. Als Begründung wird dieser Verweis jedoch in den beiden untersuchten Fallstudien nicht akzeptiert, schließlich soll die Aussage am rechtwinkligen Dreieck hergeleitet

werden. Max formuliert Bedenken, da sich die Sinusfunktion auf den Einheitskreis bezieht und nicht auf das rechtwinklige Dreieck. Auch Janine nennt kurz den Einheitskreis, distanziert sich dann aber wieder davon. Eine Argumentation am Einheitskreis wäre in dieser Aufgabenstellung gut geeignet, wird aber von keinem der Studienteilnehmenden formuliert. Dabei würde es reichen zu erklären, dass sich die y-Koordinate im ersten Quadranten bei wachsendem α vergrößert. Wendet man sich den rechtwinkligen Dreiecken zu, so sind drei Prozesse denkbar, in denen sich das Dreieck dynamisch verändert: Soll der rechte Winkel beibehalten werden, können entweder die Hypotenuse, die Ankathete oder die Gegenkathete ihre Länge beibehalten (vgl. Abbildung 6.13)

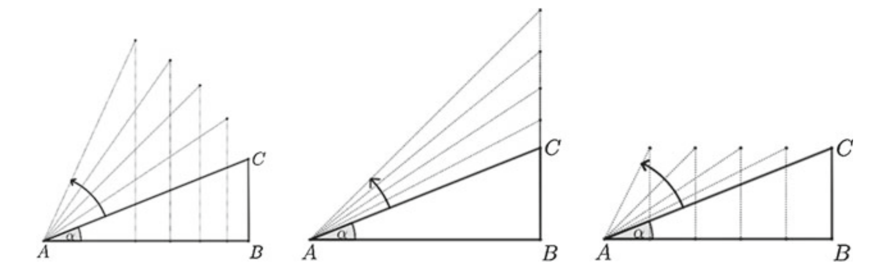


Abbildung 6.13 Winkeländerung im rechtwinkligen Dreieck (konstante Hypotenuse, Ankathete, Gegenkathete)

Im Fall der gleichbleibenden Hypotenuse ist leicht zu erkennen, dass das gesuchte Verhältnis größer wird, da sich nur der Zähler des Quotienten verändert (siehe Abbildung 6.13, erstes Beispiel). Wählt man eine Hypotenuse der Länge 1, so führt dieser Prozess zu der Definition des Sinus am Einheitskreis. Bei einer gleichbleibenden Gegenkathete verändert sich der Nenner des Quotienten (siehe Abbildung 6.13, drittes Beispiel). Im Fall der konstanten Ankathete verändern sich beide Werte des Verhältnisses, was den Sachverhalt komplizierter macht. Thompson (2008) spricht davon, dass sich Lernende die Änderung einer Winkelgröße im rechtwinkligen Dreieck üblicherweise mit einer konstanten Ankathete vorstellen. In dieser Denkweise zeigen sich bei David und Max neue Herausforderungen, die sich auf den Grenzfall $a \to \infty$ beziehen und in der Beantwortung der dritten Forschungsfrage thematisiert werden.

Aspekte der Objektvorstellung sind in den Denkprozessen der Studierenden bei der Lösung von Aufgabe 3 zu erkennen. In dieser Aufgabe soll eine geeignete

Modellfunktion aufgestellt werden, um den Schwingungsprozess eines Federpendels zu beschreiben. Dabei operieren die Studierenden auf formaler Ebene mit dem Funktionsterm und auf graphischer Ebene mit dem Funktionsgraphen. Sie verschieben und strecken den Graphen durch die Veränderung des passenden Parameters in x- und y-Richtung. Diese mathematischen Operationen können an unterschiedlichen Funktionsklassen durchgeführt werden. Charakteristisch für die Sinusfunktion und damit wesentliches Unterscheidungsmerkmal zu den anderen aus der Schule bekannten Funktionen ist der Bezug zu Periodenlänge, Phase und Amplitude der Funktion. Dieser Zusammenhang wird zwar von den Studierenden hergestellt, allerdings zeigen die Fallstudien, dass besonders die Anpassung der Periodenlänge und die Phasenverschiebung Schwierigkeiten mit sich bringen. Diese Aktionen entsprechen auf formaler Ebene der Anpassung der Faktoren b und c in der allgemeinen Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$. Wie diese Probleme zu erklären sind, wird in der Beantwortung der dritten Forschungsfrage thematisiert. Ein erwähnenswerter Modellierungsaspekt, der in dieser Aufgabe eine Rolle spielt, bezieht sich auf zentrale Eigenschaften des realen Schwingungsprozesses. So kann einerseits die Amplitude, Periodenlänge und Phasenverschiebung auf den Funktionsgraphen einer Funktion bezogen werden andererseits können diese Begriffe im Realkontext gedeutet oder verstanden werden. Beispielsweise wird die Periodenlänge einer Sinusfunktion von den Studierenden meist an drei aufeinanderfolgenden Nullstellen des Funktionsgraphen festgemacht. Im Schwingungsprozess sind es zwei aufeinanderfolgende Tiefpunkte. Besonders im Bearbeitungsprozess von Alexander und Lisa zeigt sich, dass diese Unterschiede zu Problemen führen können und ein grundlegendes Wissen über periodische Prozesse notwendig ist, um sinnvoll mit der Sinusfunktion umzugehen.

Forschungsfrage 2: Inwieweit lassen sich die normativen Grundvorstellungen zum Sinus in den Denkprozessen von Lehramtsstudierenden wiederfinden?
Bei der Beantwortung der ersten Forschungsfrage zeigte sich bereits, wie die allgemeinen funktionalen Grundvorstellungen genutzt werden können um die Denkprozesse der Studierenden in Teilen zu beschreiben und wie diese mit den Darstellungen und den sinusspezifischen Vorstellungen zusammenhängen. Um die Denkprozesse in einer feineren Unterteilung darzustellen, wird in diesem Abschnitt beschrieben, in welcher Weise die funktionsklassenspezifischen Grundvorstellungen zum Sinus im Denken der Studierenden zu Tage treten.

Die Seitenverhältnisvorstellung zeigt sich im Umgang mit rechtwinkligen Dreiecken in Aufgabe 1 und lässt sich in der Argumentation am Einheitskreis in Aufgabe 2 wiederfinden. In Aufgabe 1 wird in beiden Fallstudien von den Studierenden

das Verhältnis von Gegenkathete zur Hypotenuse als Sinus erkannt, benannt und verwendet. Im Bearbeitungsprozess von Janine und Tim zeigt sich bei Tim eine mögliche Verbindung zu Grundvorstellungen von Bruchzahlen. Er unterscheidet zwischen dem Ergebnis einer Division und dem Verhältnis zweier Zahlen, was bei ihm vorübergehend dazu führt, dass er der Gleichung $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$ nicht die Bedeutung eines Seitenverhältnisses beimisst. Max und David nutzen im Zusammenhang mit der Seitenverhältnisvorstellung den Satz des Pythagoras und versuchen mit diesem Werkzeug die Aufgabe zu lösen. Die Deutung dynamischer Prozesse fällt ihnen hingegen schwer und eine Verbindung zur Sinusfunktion kann auch nur bedingt hergestellt werden.

Die Projektionsvorstellung kann in den Bearbeitungsprozessen nicht direkt nachgewiesen werden. Den einzigen Anhaltspunkt gibt Veronika die in Szene 2 von Aufgabe 2 kurz von der Projektion spricht. Hierbei handelt es sich aber eher um einen Aspekt der Koordinatenvorstellung als um die Projektionsvorstellung. Der Grund dafür, dass die Projektionsvorstellung in den Denkprozessen nicht belegt werden kann, hängt wahrscheinlich damit zusammen, dass es sich um eine sehr spezifische Vorstellung handelt, die überwiegend in physikalischen Kontexten zum Tragen kommt. Darüber hinaus wäre es von Lehrendenseite her notwendig, den Aufbau einer solchen Vorstellung aktiv zu unterstützen.

Die Referenzdreiecksvorstellung wird in Aufgabe 2 sichtbar. In beiden Fallstudien stellt sie sich als dominantes Erklärungsmodell heraus und verdrängt dabei die Vorstellung des Sinus als y-Koordinate eines Punktes. Die Studierenden zeichnen rechtwinklige Dreiecke in die Skizze ein und nutzen die Symmetrieeigenschaften des Kreises um den Sachverhalt im ersten Quadranten zu untersuchen. Die Verlegung in den ersten Quadranten hängt vermutlich mit der schultypischen Herleitung von der Definition des Sinus am rechtwinkligen Dreieck zur Definition am Einheitskreis zusammen, bei der das Referenzdreieck als Verbindungsstück auftritt. Problematisch wird diese Vorstellung, wenn Grenzfälle betrachtet werden, in denen das Referenzdreieck verschwindet $\alpha = 0°, 90°, 180°, \ldots$ oder wenn Projektionslinien eingezeichnet werden, um die y-Koordinaten des Punktes abzulesen.

Die Koordinatenvorstellung ist aus normativer Sicht eine geeignete Vorstellung um Aufgabe 2 zu lösen. Im Bearbeitungsprozess von Janine und Tim wird sie explizit genannt und Janine gibt eine Erläuterung, wie sie zu der Definition des Sinus als y-Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis kommt. Sie erklärt, dass man zunächst im ersten Quadranten feststellen kann, dass die Definition am rechtwinkligen Dreieck und die Definition als y-Koordinate gleich sind. Anschließend kann der

Sinus auf den gesamten Einheitskreis erweitert werden, was einer Erweiterung des Definitionsbereichs entspricht. Im Laufe der Diskussion wird die Koordinatenvorstellung allerdings von der Referenzdreiecksvorstellung verdrängt. Bei Larissa und Veronika wird nicht explizit von der y-Koordinate gesprochen, dennoch scheint sie an manchen Stellen durchzuschimmern. Larissa spricht beispielsweise von der Projektion, womit die Projektion des Punktes p auf die y-Achse gemeint sein könnte. Später sprechen Larissa und Veronika darüber, ob der Sinus auf der x- oder y-Achse abgelesen wird. Auch diese Überlegung deutet auf die Koordinatenvorstellung hin, wobei ihnen unklar scheint, ob es sich beim Sinus um die x- oder die y-Koordinate handelt.

Die Oszillationsvorstellung ist in beiden Bearbeitungsprozessen zu Aufgabe 3 zu erkennen und zeigt sich dort beim Abgleich der Modellfunktion mit dem zu beschreibenden Schwingungsvorgang. Die Oszillationsvorstellung stellt einen Bezug zu realen periodischen Vorgängen her: Die Schwingungsdauer eines Durchgangs beeinflusst im Funktionsterm den Parameter vor der Variable x und damit Periodenlänge, die Auslenkung des Federpendels wird der Amplitude der Modellfunktion zugeordnet und der Startpunkt bestimmt die Phasenverschiebung. Ein Mangel an entsprechenden Grundkenntnissen kann – wie im Fall von Alexander und Lisa – zu Schwierigkeiten im Modellierungsprozess führen. Sie müssen die wesentlichen Eigenschaften des Schwingungsprozesses erst entdecken: So ist ihnen beispielsweise zunächst nicht klar, ob das Federpendel im gleichen Maße nach oben schwingt, wie es zuvor ausgelenkt wurde. Letzten Endes können die Denkprozesse der Studierenden mit der Oszillationsvorstellung besser und spezifischer beschrieben werden als mit der allgemeinen Objektvorstellung nach Vollrath.

Die Funktionsvorstellung zum Sinus kann in Aufgabe 1 und 3 identifiziert werden. Es handelt sich bei dieser Vorstellung um eine rein innermathematische sekundäre Grundvorstellung: Die Sinusfunktion erhält Bedeutung durch das Anknüpfen an mathematische Operationen mit symbolischen Objekten. Bei den Überlegungen zum Kovariationsverhalten der Sinusfunktion in Aufgabe 1 greifen die Studierenden auf die Funktionsvorstellung zum Sinus und der damit verbundenen Grundkenntnis zur Monotonieeigenschaft auf dem Intervall $(0°, 90°)$ zurück. Dabei können die Studierenden zwar einen Zusammenhang zwischen der Sinusfunktion und dem Einheitskreis etablieren, der Zusammenhang zur Seitenverhältnisvorstellung bleibt allerdings ungeklärt. In Aufgabe 3 zeigt sich die Funktionsvorstellung konkret bei den mathematischen Operationen am allgemeinen Term Sinusfunktion $a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$. Außerdem nutzen die Studierenden weitere Grundkenntnisse die der Funktionsvorstellung zum Sinus zugeordnet werden können. Zu diesen

Grundkenntnissen gehört das Wissen darüber, dass die Periode der Sinusfunktion 2π beträgt und dass die Sinusfunktion bei 0 beginnt.

Forschungsfrage 3: Können mit dem Grundvorstellungskonzept Schwierigkeiten im Umgang mit dem Sinus bei Lehramtsstudierenden identifiziert bzw. erklärt werden?
In den Videostudien wurden mehrere Probleme und Schwierigkeiten bei den Studierenden ausgemacht, die im Folgenden zusammengefasst werden.

Schwache bis fehlende Vernetzung der Seitenverhältnisvorstellung und der Funktionsvorstellung: In den Bearbeitungsprozessen zu Aufgabe 1, die in Abschnitt 6.1 analysiert wurden, zeigte sich, dass die Studierenden Schwierigkeiten haben, dynamische Prozesse am rechtwinkligen Dreieck in geeigneter Weise in ihre Argumentationen einzubinden. Der intendierte Lösungsweg, bei dem die Seitenverhältnisvorstellung genutzt werden sollte um das Kovariationsverhalten der Sinusfunktion im Intervall $(0°, 90°)$ zu bestimmen, wurde hier bei keinem der Teilnehmenden gegangen. Stattdessen wurde versucht, das Problem mithilfe der Funktionsvorstellung zu lösen. Die Studierenden nutzten Grundkenntnisse über das Monotonieverhalten der Sinusfunktion auf dem Intervall $(0°, 90°)$ und lösten die Aufgabe damit. Da in der Aufgabenstellung explizit auf die Darstellung am rechtwinkligen Dreieck verwiesen wird, wurde in beiden Fallstudien von den Studierenden versucht, eine Verbindung zwischen der Sinusfunktion und der Darstellung am rechtwinkligen Dreieck herzustellen. Dies gelang nur bedingt und deutet darauf hin, dass die Vernetzung zwischen der Funktionsvorstellung und der Seitenverhältnisvorstellung lediglich eingeschränkt vorhanden ist. Eine Erklärung dafür kann im schultypischen Lernweg vom rechtwinkligen Dreieck zur Sinusfunktion gefunden werden, bei dem der Einheitskreis als vermittelndes Element auftritt. Bei dem Transfer von Eigenschaften der Sinusfunktion auf rechtwinklige Dreiecke muss also der Weg über den Einheitskreis gegangen werden. Einen direkten Zusammenhang zwischen der Sinusfunktion und der Darstellung am rechtwinkligen Dreieck herzustellen, könnte bei Lernenden die Ausbildung eines Grundverständnisses unterstützen.

Unterschiedliche Interpretationen des Verhältnisses in der Seitenverhältnisvorstellung: Das Seitenverhältnis im rechtwinkligen Dreieck wird sowohl bei Aufgaben der Dreiecksberechnung benötigt als auch bei der Nutzung des Referenzdreiecks im Einheitskreis. Eine Schwierigkeit im Zusammenhang mit Verhältnissen liegt darin, dass sie schwer direkt zu visualisieren sind, sondern in die geometrische Figur reingedacht werden müssen (Malle 2001). Darüber hinaus können Verhältnisse in unterschiedlichen Sachzusammenhängen auftauchen: z. B. als Anwendung

beim Messen von Größen, formal als Division von Brüchen oder um Mischverhältnisse anzugeben. Dadurch kann es passieren, dass im Umgang mit der Sinusfunktion unterschiedliche Verhältnisvorstellungen kollidieren und dem Denkprozess hinderlich im Wege stehen. Dies zeigt sich eindrücklich im Bearbeitungsprozess von Janine und Tim zu Aufgabe 1 in Szene 2. Tim unterscheidet dort drei Konzepte, die dem Wert des Seitenverhältnisses zugeordnet werden können, und die er $\sin(\alpha)$ zunächst nicht in Verbindung setzt:

1. $\sin(\alpha)$ als Wert einer Funktion
2. $\sin(\alpha)$ als Ergebnis einer Division: „Gegenkathete durch Hypotenuse"
3. $\sin(\alpha)$ als Verhältnis: „2 zu 3" bzw. 2:3

Dadurch wird deutlich, wie eng die Seitenverhältnisvorstellung mit Grundvorstellungen zum Verhältnisbegriff bzw. zum Bruchzahlbegriff steht und wie eine Vernetzung dieser Grundvorstellungen zu einem Grundverständnis des Sinusbegriffs beitragen kann.

Verständnisschwierigkeiten bei Grenzprozessen am rechtwinkligen Dreieck: Bei der Betrachtung dynamischer Prozesse am rechtwinkligen Dreieck in Aufgabe 1 stellt besonders der Grenzprozess eine Herausforderung dar, bei dem sich der Winkel α dem Wert von 90° annähert. In der Bearbeitung von Tim und David zeigte sich, dass dieser Grenzprozess auf zwei unterschiedliche Weisen erfasst werden kann:

- Vergrößerung des Winkels unter Beibehaltung der Länge der Ankathete

$$\lim \alpha \rightarrow 90^\circ$$

- Verlängerung der Gegenkathete unter Beibehaltung der Länge der Ankathete

$$\lim BC \rightarrow \infty$$

Obwohl beide Prozesse aus mathematischer Sicht zum gleichen Ergebnis hinsichtlich des gesuchten Seitenverhältnisses führen, unterscheiden sie sich auf einer anschaulichen Ebene. So scheint es Tim klar zu sein, dass bei einer Annäherung des Winkels α an den Wert 90° die Gegenkathete beliebig groß wird. Dass man durch eine Verlängerung der Gegenkathete beliebig nahe an den Wert $\alpha = 90^\circ$ herankommt, scheint ihm zunächst nicht plausibel zu sein. Eine Erklärung dieser Ungewissheit kann im Kovariationsverhalten zwischen Winkel und Gegenkathete

gefunden werden. Eine gleichmäßige Vergrößerung des Winkels α beschleunigt die Verlängerung der Gegenkathete. Bei einer gleichmäßigen Verlängerung der Gegenkathete wird die Vergrößerung des Winkels α hingegen verlangsamt. An diesem Beispiel zeigt sich die Relevanz tragfähiger funktionaler Vorstellungen bei der Untersuchung geometrischer Eigenschaften. Erst das Zusammenspiel von Seitenverhältnisvorstellung und Kovariationsvorstellung ermöglichen es den Lernenden, zuverlässige Argumente zur Lösung des Problems anzuführen.

Schwierigkeiten im Umgang mit dem Referenzdreieck: Der Darstellung des Sinus am Einheitskreis wurde in der didaktisch orientierten Sachanalyse zwei Grundvorstellungen zugeordnet: die Koordinatenvorstellung und die Referenzdreiecksvorstellung. In der Analyse der Videostudien konnten beide Grundvorstellungen genutzt werden, um die Erklärungsmodelle der Teilnehmenden zu rekonstruieren und halfen dabei, mögliche Probleme zu erkennen. Die Koordinatenvorstellung erwies sich in den untersuchten Kontexten als tragfähig, wohingegen die Referenzdreiecksvorstellung zu Schwierigkeiten führte. Diese wurden in der Analyse der Videodaten ausführlich diskutiert. Die Schwierigkeiten im Umgang mit dem Referenzdreieck lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. *Bedeutung von Grenzfällen:* Im ersten Quadranten existiert für die Werte $\alpha = 0°$ und $\alpha = 90°$ im Einheitskreis kein Referenzdreieck. In diesen Fällen verschwindet die Gegenkathete bzw. die Ankathete und die übrige Kathete legt sich mit der Hypotenuse übereinander. Es bleibt lediglich eine Strecke der Länge über. Das kann dazu führen, dass Lernende, die auf Referenzdreiecksvorstellung fixiert sind, nicht in der Lage sind den Ausdrücken $\sin(0°)$ und $\sin(90°)$ eine Bedeutung zuzuschreiben.
2. *Referenzdreieck außerhalb der Standardposition:* Das Referenzdreieck wird in der Schule im ersten Quadranten eingeführt, um den Sinus anschließend auf dem gesamten Einheitskreis zu definieren. Liegt das Referenzdreieck in einem anderen Quadranten, fällt es einigen Studierenden schwer, Gegenkathete und Hypotenuse des Referenzdreiecks zu bestimmen. In diesen Fällen wird versucht, das Referenzdreieck in den ersten Quadranten zu verschieben, um die Symmetrieeigenschaften des Einheitskreises zu nutzen.
3. *Längenbestimmung der Katheten des Referenzdreiecks:* Beim Bestimmen der gerichteten Länge der Gegenkathete im Referenzdreieck wird fälschlicherweise die Projektion auf die x-Achse und nicht auf die y-Achse betrachtet. Dies lässt sich im Einzelfall auf die Verwechslung des Referenzdreiecks mit der Projektionslinie zurückführen (vgl. Abschnitt 6.2).

Die Referenzdreiecksvorstellung fungiert als Bindeglied zwischen der Definition des Sinus am rechtwinkligen Dreieck und der Definition am Einheitskreis. Sie kann als solche genutzt werden, um Zusammenhänge zu erläutern und die Übereinstimmung der beiden Definitionen auf dem Intervall $(0°, 90°)$ zu erklären. Bei der Erweiterung des Definitionsbereichs auf die reellen Zahlen ist es jedoch vorteilhaft, sich von der Referenzdreiecksvorstellung zu lösen und die Koordinatenvorstellung auszubilden, um die oben genannten Problemquellen zu umgehen.

Schwach ausgebildete Oszillationsvorstellung: In Aufgabe 3 konnten bei den Studierenden erhebliche Schwierigkeiten im Modellierungsprozess periodischer Prozesse ausgemacht werden. Diese Probleme zeugten von einer Unkenntnis elementarer Eigenschaften eines Schwingungsprozesses und deuten auf eine schwach ausgebildete Oszillationsvorstellung hin. Alexander und Lisa mussten sich beispielsweise erst durch Beobachtungen vergewissern, dass das Federpendel in gleichem Maße nach oben schwingt, wie es zuvor nach unten ausgelenkt wurde. Diese Idealisierung des Schwingungsvorganges wurde von Melanie und Jana zunächst hinterfragt. Sie machten sich Gedanken darüber, ob sie die Dämpfung des Schwingungsvorganges in der Modellierung mitberücksichtigen sollen. Es zeigt sich an diesen Beispielen, wie wichtig eine intensive Auseinandersetzung mit Oszillationsvorgängen unterschiedlicher Art ist, um ein Verständnis für periodische Prozesse aufzubauen und damit die Modellierungsfähigkeit bei Schülerinnen und Schülern zu unterstützen.

7 Zusammenfassung und Perspektiven

7.1 Ergebnisse der Arbeit

Das erste Ziel dieser Arbeit war die Durchführung einer *didaktisch orientierten Sachanalyse* zum Sinus in Hinblick auf die historische, logische und individuelle Genese der Trigonometrie. Dazu wurde zunächst auf die frühere und heutige Rolle der Trigonometrie im mathematischen Schulunterricht eingegangen, die einen Einblick in die intendierte individuelle Genese von Lernenden erlaubt. Anschließend wurde die geschichtliche Entwicklung der Trigonometrie nachgezeichnet und didaktisch reflektiert. Dabei wurde deutlich, dass in den ausgewählten historischen Zusammenhängen bereits Grundprinzipien der Trigonometrie erkennbar sind, die noch heute in Schulbüchern thematisiert werden und damit einen direkten didaktischen Nutzen aufweisen. Dazu gehören die Messmethoden des Thales (vgl. Abschnitt 4.2.3) und die Berechnung spezieller Sinuswerte $\sin(30°)$, $\sin(60°)$, $\sin(45°)$ mithilfe elementargeometrischer Überlegungen (vgl. Abschnitt 4.2.7). Es wurden darüber hinaus weitere historische Beispiele diskutiert, deren didaktischer Nutzen in der höheren Mathematik zu verorten ist. So konnten die Additionstheoreme in Zusammenhang mit rechnerischen Verfahren zur Bestimmung der halben Sehne am Einheitskreis gebracht werden (vgl. Abschnitt 4.2.8). Weiter wurden rekursive Additionsverfahren aus dem 16. Jahrhundert untersucht, in denen Gedanken der frühen Differentialrechnung erkennbar sind (vgl. Abschnitt 4.2.10). Danach wurde die innere logische Struktur der Trigonometrie analysiert und auf unterschiedliche Definitionen der Sinusfunktion und deren Zusammenhänge eingegangen (vgl. Abschnitt 4.3). Dieses Vorgehen diente vor allem dazu, die impliziten und expliziten mathematischen Konzepte herauszuarbeiten, die notwendig sind, um verständig mit den jeweiligen Darstellungen zu arbeiten und zwischen ihnen zu wechseln. Aus

V. Katter, *Historische, logische und individuelle Genese der Trigonometrie aus didaktischer Sicht*, Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik 10,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-41355-2_7

didaktischer Sicht wurde damit das Begriffsnetz zum Sinus präzisiert. Insgesamt wurden neun Definitionen diskutiert, die unter geometrischen, algebraischen, analytischen und funktionalen Gesichtspunkten untersucht wurden. Zuletzt erfolgte eine Zusammenschau von inner- und außermathematischen Anwendungskontexten (vgl. Abschnitt 4.4). Von besonderem Interesse sind in diesem Abschnitt die Anwendungen aus der Physik, durch die neue Aspekte der Sinusfunktion erfahrbar werden. Dabei handelt es sich um den Aspekt der Sinusfunktion als Modellfunktion periodischer Prozesse und als Werkzeug bei der Ermittlung der Größe von projizierten Kräften.

Das zweite Ziel der Arbeit bestand darin, auf Grundlage der didaktisch orientierten Sachanalyse *normative Grundvorstellungen* herzuleiten. Dazu wurden Klassen ähnlicher Phänomene bzw. Sachzusammenhänge gebildet, durch die Aspekte der Sinusfunktion didaktisch umgesetzt werden können (vgl. Abschnitt 4.6). Diese Klassen bilden das Fundament, von dem ausgehend Grundvorstellungen formuliert wurden. Insgesamt konnten sechs Grundvorstellungen identifiziert werden:

1. Die Seitenverhältnisvorstellung
2. Die Projektionsvorstellung
3. Die Referenzdreiecksvorstellung
4. Die Koordinatenvorstellung
5. Die Oszillationsvorstellung
6. Die Funktionsvorstellung

Diese Grundvorstellungen stellen in ihrer Unterscheidung und in der Formulierung eine Erweiterung der von Salle und Frohn (2017) formulierten Grundvorstellungen dar. Weiterhin bildet die stringente Herleitung ein solides fachdidaktisches Fundament.

Schließlich bestand das dritte Ziel dieser Arbeit darin, *Denkprozesse* von Studierenden im Umgang mit dem Sinusbegriff zu *rekonstruieren* und mithilfe des Grundvorstellungskonzepts zu *analysieren*. Dazu wurde eine Videostudie durchgeführt, in der Studierende in Partnerarbeit Probleme der Trigonometrie lösen. In diesen Problemen tauchten unterschiedliche Darstellungen der Sinusfunktion auf, die als Träger von Grundvorstellungen dienen, das heißt, dass sie spezifische Grundvorstellungen bei den Lernenden aktivieren können. Die Bearbeitungsprozesse der Studierenden wurden transkribiert, in Szenen aufgeteilt und schließlich mithilfe qualitativer Methoden analysiert. In den Analysen konnten, mit Hilfe allgemeiner funktionaler Grundvorstellungen und funktionsklassenspezifischer Grundvorstellungen zum Sinus, mögliche Deutungs- und

Erklärungsmodelle der Studierenden rekonstruiert werden. Mit den allgemeinen funktionalen Grundvorstellungen war es unter anderem möglich, unterschiedliche Zuordnungsvorstellungen am Einheitskreis zu identifizieren: Der Sinus als gerichtete Seitenlänge im Referenzdreieck und der Sinus als y-Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis. Mit der Kovariationsvorstellung konnte die Argumentationen der Studierenden zum Änderungsverhalten zwischen Argument und Funktionswert der Sinusfunktion erklärt werden. Darüber hinaus wurde die Kovariation auf höherer Ebene – zwischen den Parametern einer Funktion und dem Funktionsgraphen – untersucht. Die funktionsklassenspezifischen Grundvorstellungen zum Sinus erwiesen sich in der Analyse als besonders nützlich, da sie es erlaubten, die Denkprozesse der Studierenden detaillierter und differenzierter zu erfassen. Dadurch konnten explizit vier Schwierigkeiten im Umgang mit dem Sinus festgestellt werden:

- Schwache bis fehlende Vernetzung der Seitenverhältnisvorstellung und der Funktionsvorstellung des Sinus,
- unterschiedliche Interpretationen des Verhältnisses in der Seitenverhältnisvorstellung,
- Verständnisschwierigkeiten bei Grenzprozessen am rechtwinkligen Dreieck,
- Schwierigkeiten im Umgang mit dem Referenzdreieck und
- eine schwach ausgebildete Oszillationsvorstellung.

An diesen Ergebnissen wird besonders deutlich, wie die Weiterentwicklung des Grundvorstellungskonzepts auf funktionsklassenspezifische Grundvorstellungen zum Sinus und die Einbindung in mathematikdidaktische Analyseverfahren zur Rekonstruktion von Denkprozessen dabei helfen kann, potentielle Fehlerquellen zu identifizieren, um schließlich daraus Konsequenzen für die Lehrpraxis zu ziehen.

7.2 Perspektiven

In diesem Abschnitt werden Perspektiven für die Forschung sowie für die Unterrichtspraxis entwickelt.

7.2.1 Forschungsperspektiven

Sowohl der theoretische als auch der empirische Teil dieser Arbeit fördern neue didaktische Erkenntnisse im Bereich der Trigonometrie zu Tage. Mit jedem Ergebnis stellen sich dem Forschenden neue Fragen und eröffnen sich neue Anwendungsbereiche. Diese Fragen und Anwendungen werden in den folgenden Abschnitten thematisiert.

Anwendung der didaktisch orientierten Sachanalyse auf weitere Funktionsklassen: In der vorliegenden Arbeit wurde ein vierschrittiges methodisches Vorgehen vorgestellt, mit dem eine didaktisch orientierte Sachanalyse durchgeführt werden kann, die zu der Formulierung normativer Grundvorstellungen führt. Dieses Vorgehen wurde auf den Bereich der Trigonometrie angewendet, um damit Grundvorstellungen zur Sinusfunktion zu identifizieren. Diese Grundvorstellungen können zum einen dazu genutzt werden, in der empirischen Forschung Denkprozesse von Lernenden zu rekonstruieren und Lernschwierigkeiten zu identifizieren, zum anderen liefern sie eine Orientierung für Lehrende und können dabei helfen, den Unterricht zu strukturieren. Diese Methode lässt sich auch auf andere Bereiche anwenden, so kann eine ausführliche didaktisch orientierte Sachanalyse zu weiteren Funktionsklassen wie z. B. zu linearen Funktionen, quadratischen Funktionen, Exponentialfunktionen oder Logarithmusfunktionen sinnvoll sein und gegebenenfalls zu neuen Grundvorstellungen führen. Diese Grundvorstellungen können wiederum zielführend in der didaktischen Forschung und in der Unterrichtspraxis eingesetzt werden.

Vertiefende Analyse der fachlichen Definitionen der Sinusfunktion: Die logische Genese der Trigonometrie offenbart eine Vielzahl von möglichen Definitionen der Sinusfunktion. Zu vielen dieser Definitionen wurde kein direkter Schulbezug hergestellt, weswegen in dieser Arbeit nur am Rande darauf eingegangen wurde. Diese Definitionen können Ausgangspunkt weiterer Grundvorstellungen sein, die in den Teilbereichen der Mathematik, in denen sie formuliert wurden, von Relevanz sind. Eine vertiefende Analyse dieser Definitionen ist aus fachmathematischer Sicht bedeutend und kann das Begriffsnetz von Studierenden zu trigonometrischen Funktionen erweitern.

Quantitative Untersuchungen: Bei den durchgeführten Videostudien handelt es sich um ein qualitatives Forschungsunterfangen mit einem explorativen Charakter. Aufgrund der kleinen Stichprobe von insgesamt 16 Mathematik Lehramtsstudierenden wurden bisher nur erste qualitative Einblicke in die Denk- und Handlungsweisen von Lernenden im Bereich der Trigonometrie gegeben. Auf

der Basis der dadurch gewonnenen Erkenntnisse wäre die Entwicklung eines Testinstrumentes sinnvoll, das quantitative Ergebnisse über inhaltliche und prozessbezogene Kompetenzen zur Trigonometrie von Lehramtsstudierenden liefert. Mit diesem Testinstrument können mögliche Divergenzen zwischen den Anforderungen des Lehramtsstudiums und der Qualifikation der Studierenden ermittelt werden. Denkbar wäre weiterhin ein Testinstrument, welches das Professionswissen von Lehrenden im Bereich der Trigonometrie überprüft und didaktische sowie fachdidaktische Kompetenzen untersucht.

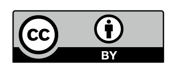
7.2.2 Perspektiven für die Unterrichtspraxis

Der Wert einer didaktischen Studie bemisst sich unter anderem an der Relevanz für die Unterrichtspraxis. In diesem Abschnitt werden Perspektiven vorgestellt, wie die Ergebnisse dieser Arbeit in der Lehrer- und Schülerbildung genutzt werden können.

Entwicklung diagnostischer Kompetenzen bei Lehrenden: In den untersuchten Fallstudien wurden Schwierigkeiten im Umgang mit unterschiedlichen Darstellungen der Sinusfunktion aufgezeigt, die typische Fehler nach sich ziehen. Dazu gehören beispielsweise ein problematischer Umgang mit dem Referenzdreieck im Einheitskreis oder Schwierigkeiten bei der Interpretation dynamischer Prozesse am rechtwinkligen Dreieck. Diese Fehler sollten von Lehrenden erkannt und in Zusammenhang mit den entsprechenden Grundvorstellungen bzw. Erklärungsmodellen gebracht werden, um geeignet darauf zu reagieren. Im Lehramtsstudium sollten die Studierenden dementsprechend mit den benötigten diagnostischen Kompetenzen ausgebildet werden, um die Möglichkeit zu haben, solchen Problemen entgegenzuwirken.

Stärkere Berücksichtigung der Trigonometrie und ihrer Anwendung in der Schule: Die trigonometrischen Funktionen sind das prototypische Werkzeug zur Modellierung periodischer Prozesse und damit unerlässlich für Anwendungen in der Physik, Biologie, Ökonomie und vielen weiteren Bereichen. Wie die didaktisch orientierte Sachanalyse in Kapitel 4 zeigte, haben sich die Anwendungsbereiche des Sinusbegriffs in den letzten Jahrhunderten stark verlagert: weg von der Astronomie und der Navigation auf hoher See, hin zu Anwendungen in der Elektrotechnik und der Informationstechnologie. Dieser grundlegende Bedeutungswechsel, der bezeichnend für die heutige Zeit ist, sollte auch im Schulkurrikulum berücksichtigt werden, um den Schülerinnen und Schülern ein aktuelles Bild der Mathematik und ihren Einsatzbereichen zu vermitteln.

Entwicklung von grundvorstellungsgestützten Unterrichtskonzepten: Um Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit zu geben, Grundvorstellungen zum Sinus aufzubauen, sind geeignete Unterrichtskonzepte notwendig, in denen die sinngebenden Sachzusammenhänge entsprechend eingebunden werden. Dabei bildet die aktive Auseinandersetzung mit diesen inner- und außermathematischen Sachzusammenhängen und deren Integration in die individuellen Erklärungsmodelle der Lernenden den ersten Schritt zur individuellen Begriffsbildung. Konkret bedeutet das beispielsweise für die Seitenverhältnisvorstellung am rechtwinkligen Dreieck, dass Messverfahren im Unterricht thematisiert oder Vermessungen im Gelände durchgeführt werden sollten. Um die Oszillationsvorstellung auszubilden, bietet es sich an, eine Reihe von periodischen Prozessen zu modellieren, wie beispielsweise die Schwingung eines Federpendels oder eines Metronoms. Wichtig ist dabei, dass die zu den Grundvorstellungen passenden Grundkenntnisse thematisiert werden und in den Arbeitsaufträgen wiederzufinden sind.



Literaturverzeichnis

Akkoc, H. (2008) Pre-service mathematics teachers' concept images of radian. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 39(7): 857–878.

Balser, W. (2008) Vorlesungsskript zur Funktionentheorie II. http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/balser/Skripten/Fth-II.pdf (28.04.2021).

Bellmann, J. (2020) Theoretische Forschung. Unterscheidung und Bezeichnung eines spezifischen Modus der Wissensproduktion. In: *Zeitschrift für Pädagogik* 66(6): 788–806.

Bender, P. (1991) Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In: Postel, H.; Kirsch A.; Blum, W. (eds.) *Mathematik lehren und lernen: Festschrift für Heinz Griesel.* Hannover: Schroedel.

Berggren, J.; Sidoli, N. (2007) Aristarchus's On the Sizes and Distances of the Sun and the Moon: Greek and Arabic Texts. In: *Archive for History of Exact Sciences* 61(3): 213–254.

Biddle, J. (1967) The square function: An abstract system for trigonometry. In: *The Mathematics teacher* 60(2): 121–123.

Blum, W.; Törner, G. (1983) *Didaktik der Analysis.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Braunmühl, A. von (1903) *Vorlesungen über die Geschichte der Trignometrie.* BG Teubner.

Bressoud, D. (2010) Historical Reflections on Teaching Trigonometry. In: *Mathematics Teacher* 104(2): 106–122.

Brown, E.; Rice, A. (2011) Trigonometry without triangles. In: *Math Horizons* 19(2): 20–23.

Brown, S. (2005) *The trigonometric connection.* Illinois State University.

Bruner, J. (1974) *Entwurf einer Unterrichtstheorie.* Berlin-Verlag.

Burch, W. J. (1981) *the development interview, testing, and generalization of a theory based model of conceptual structures for solving routine Trigonometry problems.* Dissertation Virginia Polytechnic Institute.

Cetin, O. (2015) Students perceptions and development of conceptual understanding regarding trigonometry and trigonometric function. In: *Educational Research and Reviews* 10(3): 338–350.

Challenger, M. (2009) *From triangles to a concept: a phenomenographic study of A-level students' development of the concept of trigonometry.* Dissertation University of Warwick.

Copernicus, N. (1995) *On the Revolutions of Heavenly Spheres.* Amherst: Prometheus.

Cornetz, E.; Hecht, W.; Koullen, R.; Kreuz, J.; Nix, F.; Paffen, H.; Reufsteck, G.; Sprehe, C. (2019) *Mathematik real 10.* Cornelsen.

V. Katter, *Historische, logische und individuelle Genese der Trigonometrie aus didaktischer Sicht*, Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik 10,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-41355-2

Dippel, M.; Renwanz, E.; Schneiß, H.; Zacharias, M. (2016) *Mathematik neue Wege 9. Arbeitsbuch für Gymnasien Nordrhein-Westfalen.* Braunschweig: Schroedel Westermann.

Duval, R. (1993) Registres de representation semiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*: 37–65.

Duval, R. (2006) A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. In: *Educational Studies in Mathematics* 61(1–2): 103–131.

Brown, E.; Rice, A. (2011) Trigonometry without triangles. In: *Math Horizons* 19(2): 20–23.

Eisenlohr, A. (1877) Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum).

Espenshade, P. (1967) A text on trigonometry by Levi ben Gerson (1288–1344). In: *Mathematics Teacher* 60(6): 628–637.

Falcke, H.; Römer, J. (2020) *Licht im Dunkeln. Schwarze Löcher, das Universum und wir.* Stuttgart: Klett-Cotta.

Fi, C. D. (2003) *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: Subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy.* University of Iowa.

Filler, A. (2021) Didaktik der Elementargeometrie. Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung. http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/didgeo6_trigonometrie.pdf (22.01.2021).

Fladt, K.; Kraft, A.; Dreetz, W. (1959) *Mathematisches Unterrichtswerk fur höhere Schulen.* Diesterweg.

Folkerts, M.; Launert, D.; Thom, A. (2016) Jost Bürgi's method for calculating sines. In: *Historia Mathematica* 43(2): 133–147.

Freudenthal, H. (1983) *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel.

Frohn, D.; Salle, A. (2017) Grundvorstellungen zu Sinus und Kosinus. In: *mathematik lehren* 204: 10–16.

Gersemehl, I.; Jörgens, T.; Jürgensen-Engl, T.; Riemer, W. (2013) *Lambacher Schweizer 9: Mathematik für Gymnasien/Nordrhein-Westfalen.* Stuttgart: Klett.

Geyer, W.-D. (2001) Vorlesung über antike Mathematik SS2001. https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/ez/material/geyer.pdf.

Graumann, G. (1987) Eine genetische Einführung in die Trigonometrie. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht: 21. Bundestagung vom 10.3 bis 13.3 1987*.

Gray, E.; Tall, D. (1994) Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. In: *Journal for Research in Mathematics Education,* 25(2): 116–140.

Greefrath, G. (2018) *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Greefrath, G.; Oldenburg, R.; Siller, H.; Weigand, H.; Ulm, V. (2016) *Didaktik der Analysis.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Griesel, H. (1971) Die mathematische Analyse als Forschungsmittel in der Didaktik der Mathematik. In: *Beitrage zum Mathematikunterricht 1971*: 72–81.

Griesel, H.; Gundlach, A.; Postel, H.; Suhr, F. (eds.) (2016) *EdM – Elemente der Mathematik 9.* Nordrhein-Westfalen: Schroedel.

Hafner, T. (2012) *Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I.* Dissertation.

Heyting, A. (1931) Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik. In: *Erkenntnis* 2(1): 106–115.

Hischer, H. (2020) *Studien zum Gleichungsbegriff.* Hildesheim: Franzbecker.
Hoffmann, B. (1915) Mathematische Himmelskunde und niedere Geodäsie an den höheren Schulen. In: Klein, F. (ed.) *Beitrag über den mathematischen Unterricht in Deutschland.* Leipzig: Teubner.
Hußmann, S.; Rezat, S.; Sträßer, R. (2016) Subject Matter Didactics in Mathematics Education. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 37(S1): 1–9.
Jahnke, H. (1998) Sonne, Mond und Erde. oder: Wie Arstarch von samos mit Hilfe der Geometrie hinter die Erscheinung sah. In: *mathematik lehren* 91: 20–48.
Jamshid Nejad, M. (2017) *Students' understanding of transformations of sinusoidal functions.* Dissertation Simon Fraser University.
Katter, V. (2017) Ableitung von sin und cos. In: *mathematik lehren* 204: 40–43.
Katter, V. (2019) The connection between angle measure and the understanding of sine. In: *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.*
Katter, V. (2020a) Inhaltliche Kompetenzen von Lehramtsstudierenden im Bereich Trigonometrie. In: Siller, H.-S., Weigel, W. Wörler, J. F. (ed.) *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag.
Katter, V. (2020b) Vom Dreieck über den Kreis zur Sinusfunktion. In: *mathematik lehren* 218: 23–26.
Katter, V.; Alarcón Relmucao, N. (2021) Construyendo en clases las nociones básicas de la funcion exponencial y funcion seno. In: vom Hofe, R.; Soto-Andrade, J.; Vargas Diaz, C.; Reyes-Santander, P.; Ramos Rodriguez, E.; Puraivan Huenuman, E. (eds.) *Matemática enactiva. Aportes para la articulación entre teoría y práctica en la educación matemática.* Grao.
Katz, V. (1995) Sines & Cosines of the Times. In: *Math Horizons* 2(4): 5–15.
Katz, V. (2004) *A history of mathematics.* Pearson/Addison-Wesley.
Katz, V. (2011) Copernican Trigonometry. In: Jardine, D.; Shell-Gellasch, A. (eds.) *Mathematical Time Capsules.* Washington DC: The Mathematical Association of America: 73–88.
Kendal, M.; Stacey, K. (1996) Trigonometry Comparing Ratio and Unit Circle Methods. In: *Technology in Mathematics Education. Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics education Research group of Australasia*: 322–329.
Kirsch, A. (1977) Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. In: *Didaktik der Mathematik* 5(2): 87–101.
Kirsch, A. (1979) Anschauung und Strenge bei der Behandlung der Sinusfunktion und ihrer Ableitung. In: *der Mathematikunterricht* 25(3): 51–71.
Klafki, W. (1958) didaktische Analyse als Kern der Unterrichtsvorbereitung-. In: *Die deutsche Schule* 50(10): 450–471.
Klein, F. (ed.) (1915) *Beitrag über den mathematischen Unterricht in Deutschland.* Leipzig: Teubner.
Klein, F. (1924) *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte Aus.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
Klinger, M. (2018) *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis.* Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.
KLP Bayern: Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (2009) *Lehrplan für Jahrgangsstufe 10 bis 12.*

KLP Berlin: Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin (2006) *Berliner Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I – Mathematik*.

KLP I NRW: Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2019) *Kernlehrplan für die Sekundarstufe I Gymnasium in Nordrhein-Westfalen.*

KLP II NRW: Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2014) *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen. KLP (2) NRW*.

KMK (2012) *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die AllgemeineHochschulreife. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012).* Köln: Wolters Kluwer.

Kollhoff, S. (2021) *Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs.* Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Körner, H. (ed.) (2015) *Mathematik – neue Wege. Arbeitsbuch.* Braunschweig: Schroedel.

Korntreff, S. (2018) *didaktische Herausforderungen der Trigonometrie.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Krauss, S.; Neubrand, M.; Blum, W.; Baumert, J.; Brunner, M.; Kunter, M.; Jordan, A. (2008) Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und –Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 2008(29): 223–258.

Kronfellner, M. (1997) Historische Aspekte im Mathematikunterricht. In: *Didaktikreihe der ÖMG.*

Kronfellner, M. (1998) *Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse mit unterrichtspraktischen Beispielen.* Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Launert, D. (2016) Sinustafel wiederentdeckt – Bürgis "Kunstweg" entschlüsselt. In: *Mitteilungen der DMV* 24(2): 89.

Lowsky, M. (2013) Die Ableitung des Sinus ist der Kosinus, oder: Wie autoritär ist die Mathematik? In: *Mathematik im Prozess*: 255–264.

Magnus, K.; Popp, K.; Sextro, W. (2016) *Schwingungen.* Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Mali, A.; Müller, E. (2000) Lokale trigonometrische Basen in der Bilddatenkompression. In: *Frequenz* 54(9–10): 225–235.

Malle, G. (2001) Genetisch in die Trigonometrie. In: *mathematik lehren* (109): 40–44.

Malle, G.; Wittmann, E. (1993) *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Vieweg+ Teubner Verlag.

Maor, E. (1998) *Trigonometric delights.* Universities Press.

Martinez Ortega, M.; Preciado Babb, A.; Velasco, H. (2017) *Making Meaning of Periodic Functions through Body Movements.* University of Calgary.

Martín-Fernández, E.; Ruiz-Hidalgo, J.; Rico, L. (2019) Meaning and Understanding of School Mathematical Concepts by Secondary Students: The Study of Sine and Cosine. In: *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education* 15(12).

McCarthy, D.; Byrne, J. (2003) Al-Khwarizmi's sine tables and a western table with the Hindu norm of R=150. In: *Archive for the history of exact sciences* 57(3): 243–266.

Möller, K. (2001) Genetisches Lehren und Lernen – Facetten eines Begriffs. In: Cech, D. (ed.) *Die Aktualität der Pädagogik Martin Wagenscheins für den Sachunterricht. Walter Köhnlein zum 65. Geburtstag. 1. Aufl.* Bad Heilbrunn: Klinkhardt: 15–30.

Moore, K. (2012) Coherence, Quantitative Reasoning, and the Trigonometry of Students. In: *Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context* 2: 75–92.

Padberg, F.; Wartha, S. (2017) *Didaktik der Bruchrechnung.* Berlin: Springer Spektrum.

Petrache, H. (2014) Correspondence Between Geometric and Differential Definitions of the Sine und Cosine. In: *The College Mathematics Journal* 45(1): 11–15.

Podbelsek, A. (1972) *A Study of Various Deductive Models for Developing and Teaching Plane Trigonometry Including an Investigation of the General Nature of Trigonometry.* University of Illiois at Urbana.

Prediger, S. (2010) „Aber wie sag ich es mathematisch?“ – Empirische Befunde und Konsequenzen zum Lernen von Mathematik als Mittel zur Beschreibung von Welt. In: *Entwicklung naturwissenschaftlichen Denkens zwischen Phänomen und Systematik. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik in Dresden 2009.* Berlin: LIT.

Prediger, S.; Wessel, L. (2013) Darstellen – Deuten – Darstellungen vernetzen. Ein fach- und sprachintegrierter Förderansatz für mehrsprachige Lernende im Mathematikunterricht. In: Prediger, S.; Özdil, E. (eds.) *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit.* Münster: Waxmann.

Reinhardt, W.; Zeisberg, M. (1929) *Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen.* Frankfurt am Main: Moritz Dießterweg.

Remmert, R.; Schumacher, G. (2007) *Funktionentheorie.* Berlin: Springer.

Rodrigue, C. (2018) Use of Parallax to Calculate Mars’ Distance from Earth and Use of Kepler’s Third Law to Calculate Earth’s Distance from Sun. https://home.csulb.edu/~rodrigue/geog441541/labs/parallax.html (11.04.2022).

Roegel, D. (2015) *Jost Bürgi’s skillful computation of sines.* Research Report LORIA-Université de Lorraine.

Roos, A.-K. (2020) *Mathematisches Begriffsverständnis im Übergang Schule–Universität.* Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Roppel, C. (2006) *Grundlagen der digitalen Kommunikationstechnik.* Fachbuchverlag Leipzig.

Salle, A. (2015) *Selbstgesteuertes Lernen mit neuen Medien.* Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Salle, A.; Clüver, T. (2021) Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*.

Salle, A.; Frohn, D. (2020) Alternative Sinus und Kosinusfunktion. In: *mathematik lehren* 218.

Schimmack, R. (1915) Die Entwicklung der mathematischen Unterichtsreform in Deutschland. In: Klein, F. (ed.) *Beitrag über den mathematischen Unterricht in Deutschland.* Leipzig: Teubner.

Schulz, A.; Wartha, S. (2011) *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen.* Kiel: IPN.

Schumacher, S. (2017) *Lehrerprofessionswissen im Kontext beschreibender Statistik.* Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Shirali, S. (2011) The Bhaskara-Aryabhata Approximation to the Sine Function. In: *Mathematics Magazine* 84(2): 98–107.

Skemp, R. (1987) *the psychology of learning mathematics.* Psychology Press.

Stölting, P. (2008) *Die Entwicklung des funktionalen Denkens in der Sekundarstufe I. Vergleichende Analysen und empirische Studien zum Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich.* Dissertation Université Paris Diderot.

Stoye, W. (1983) Zum Arbeiten mit Funktionen im Mathematikunterricht der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule. In: *Stoye, W. „Zum Arbeiten mit Funktionen im Mathematikunterricht der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule.“ Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe* 32(1): 77–84.

Tall, D.; Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In: *Educational Studies in Mathematics* 12(2): 151–169.

Thompson, P. (2008) Conceptual Analysis of mathematical ideas: Some Spadework at the Foundation of mathematics education. In: Figueras, O.; Cortina, J.; Alatorre, S.; Rojano, T.; Sépulveda, A. (eds.) *Plenary Paper presented at the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Morélia, Mexico: PME.: 31–49.

Thompson, P.; Carlson, M.; Silverman, J. (2007) The design of tasks in support of teachers development of coherent mathematical meanings. In: *Journal of Mathematics Teacher Education* 10(4–6): 415–432.

Tropfke, J. (1903) *Geschichte der Elementarmathematik*.

Ursus, N. (1588) *Fundamentum Astronomicum.* Straßburg.

van Brummelen, G. (2009) *The mathematics of the heavens and the Earth: the early history of trigonometry.* Princeton University Press.

van Brummelen, G. (2020) *Trigonometry. a very short introduction.* Oxford University Press.

van Sickle, J. (2011) *A History of Trigonometry Education in the united states.* Dissertation Columbia University.

Vollrath, H. (1987) Didaktische Phänomenologie als Grundlage für die Erforschung der Konstitution mentaler Objekte. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 8: 247–256.

Vollrath, H. (1989) Funktionales Denken. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 10(1): 3–37.

vom Hofe, R. (1995) *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

vom Hofe, R. (1996) Arithmetische Grundvorstellungen und funktionales Denken. In: *Mathematica Didactica* 19(2): 28–42.

vom Hofe, R. (1998) Probleme mit dem Grenzwert Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*.

vom Hofe, R. (2003) Gundbildung durch Grundvorstellungen. In: *mathematik lehren* 118: 4–8.

vom Hofe, R.; Blum, W. (2016) “Grundvorstellungen” as a Category of Subject-Matter Didactics. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 37(S1): 225–254.

vom Hofe, R.; Fast, V. (2015) Geometrische Darstellungen als Vorstellungsgrundlage für algebraische Operationen am Beispiel der negativen Zahlen. In: *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen.* Springer Spektrum, Wiesbaden: 43–55.

vom Hofe, R.; Humpert, B.; Griesel, H.; Postel, H. (eds.) (2019) *Mathematik heute.* Braunschweig: Schroedel Westermann.

vom Hofe, R.; Salle, A.; Lotz, J. (2015) Analysis – Leitidee Zuordnung und Veränderung. In: Bruder, R.; Hefendehl-Hebeker, L.; Schmidt-Thieme, B.; Weigand, H.-G. (eds.) *Handbuch der Mathematikdidaktik.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Vorhölter, K.; Vollstedt, M. (2012) Zur theoretischen Konzeption und zu den Möglichkeiten der unterrichtspraktischen Umsetzung der Sinnkonstruktion. In: Blum, W.; Borromeo Ferri, R.; Maaß, K. (eds.) *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag: 148–156.

Wagenschein, M. (1966) Zum Problem des Genetischen Lehrens. In: *Zeitschrift für Pädagogik* 12(4): 305–330.

Wagenschein, M. (2010) *Verstehen lehren: genetisch, sokratisch, exemplarisch.* Beltz.

Weber, C. (2013) Grundvorstellungen zum Logarithmus – Bausteine für einen verständlichen Unterricht. In: Allmendinger, H.; Lengnink, K.; Vohns, A.; Wickel, G. (eds.) *Mathematik verständlich unterrichten.* Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden: 79–98.

Weber, C. (2016) Making Logarithms Accessible – Operational and Structural Basic Models for Logarithms. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 37(S1): 69–98.

Weber, K. (2005) Students' Understanding of Trigonometric Functions. In: *Mathematics Education Research Journal* 17(3): 91–112.

Weigand, H.-G. (2015) Begriffsbildung. In: Bruder, R.; Hefendehl-Hebeker, L.; Schmidt-Thieme, B.; Weigand, H.-G. (eds.) *Handbuch der Mathematikdidaktik.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg: 255–278.

Winter (1992) Wie läßt sich Mathematikdidaktik als Hochschuldisziplin rechtfertigen. In: *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 2(2): 14–18.

Winter, H. (1996) Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 4(2): 35–41.